Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 13**	Tutorium 16.12.2016

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\cos x}{(x-a)^2+b^2} \, , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{(x-a)^2+b^2} \, , \quad a, b \in \mathbb{R} \, .$$

[Hinweis: Drücken Sie $\cos$ und $\sin$ als Real- und Imaginärteil von e^{ix} aus.]

Aufgabe 2: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\ln(x-i)}{(x+i)^2} \, ,$$

indem Sie die Kontur so umformen, dass sie längs des Schlitzes läuft. [Antwort: π.]

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, \cos(x^2) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, \sin(x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \, ,$$

indem Sie entlang der Kurve $\partial S_{\pi/4}(R)$ integrieren, wobei $S_{\pi/4}(R)$ den Sektor $S_{\pi/4}(R) = \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid 0 < r < R \, , 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\}$ bezeichnet.

(b) Bekannterweise gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$, $a > 0$. Verifizieren Sie anhand der Ergebnisse aus Punkt (a), dass der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}$ als analytische Fortsetzung der Formel aus dem Reellen interpretiert werden kann.

Aufgabe 4: Wenn die Kontur *über* einen Pol verläuft, muss die Bedeutung des Integrals genau definiert werden. Man kann einen *Rechtswert* definieren, $\mathscr{R} \int_\gamma \mathrm{d}z \, f(z) := \int_{\gamma_R} \mathrm{d}z \, f(z)$, wobei γ_R so gewählt ist das der Pol rechts liegen bleibt; und ebenfalls einen *Linkswert*, $\mathscr{L} \int_\gamma \mathrm{d}z \, f(z) := \int_{\gamma_L} \mathrm{d}z \, f(z)$. Der *Prinzipalwert* sei $\mathscr{P} \int_\gamma \mathrm{d}z \, f(z) := \frac{1}{2}(\mathscr{L} + \mathscr{R}) \int_\gamma \mathrm{d}z \, f(z)$.[1]

(a) Verifizieren Sie die Gültigkeit der formalen Beziehung

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i0^+} \, ,$$

wobei $\theta(t)$ die Stufenfunktion und 0^+ eine kleine positive Zahl ist. [Hinweis: Es lohnt sich, den Hilfsweg in der Halbebene verlaufen zu lassen, in der er keinen Beitrag liefert.]

(b) Ermitteln Sie den Wert von $\mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega}$. [Antwort: $\frac{1}{2}$.]

[1] Es kann gezeigt werden, dass wenn der Pol von erster Ordnung ist und längs der x-Achse integriert wird, dann ist der Prinzipalwert gleich dem *Cauchyschen Hauptwert*, d.h.

$$\mathscr{P} \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \int_a^{x_0 - \epsilon} \mathrm{d}x \, f(x) + \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x \, f(x) \right\} .$$