Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 12**	Tutorium 09.12.2016

Aufgabe 1: Die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ seien analytisch auf einem Gebiet $G \in \mathbb{C}$, und γ sei eine Kurve ganz im G, die den Punkt $z_0 \in G$ umläuft. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\oint_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f'(z)}{z - z_0} = \oint_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \; .$$

[Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Cauchyschen Integralsatz zu benutzen, um die Kontur so nah an z_0 zu bringen, dass Reihen-Darstellungen konvergieren.]

Aufgabe 2: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x \, x^2}{1 + x^4} \; .$$

[Antwort: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.]

Aufgabe 3: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(a + \cos\theta)^2} \; , \quad |a| > 1 \; .$$

[Antwort: $\pi|a|/(a^2 - 1)^{3/2}$.]

In der Prüfung (10.01.2017 um 13:15 - 15:45 Uhr im A6) sind keine Hilfsmittel erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$\mathscr{L} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}] + q(x)f(x)$	$\mathscr{L} v_n(x) + \lambda_n w(x) v_n(x) = 0$	$\oint_\gamma \mathrm{d}z \, f(z) = 2\pi i \sum_{p \in G} \nu_\gamma(p) \, \mathrm{Res}_p f$
$\langle g\vert f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, w(x) g^*(x) f(x)$	$\mathscr{L} G(x;y) + \delta(x-y) = 0$	$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$
$\langle k\vert q\rangle = \delta\!\!\!{}^-(k-q)$	$\sum_{n=1}^\infty v_n(x) v_n^*(y) = \frac{\delta(x-y)}{w(y)}$	$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\vert\zeta-z_0\vert=r} \frac{\mathrm{d}\zeta \, f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$
$\mathbb{1} = \int \text{đ}k \, \vert k\rangle\langle k\vert$	$\sum_{n=1}^\infty \frac{v_n(x) v_n^*(y)}{\lambda_n} = G(x;y)$	$a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0} f$
$\langle x\vert k\rangle = e^{ikx}$, $\text{đ}k = \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$ [Fourier]	$c_n = \langle v_n\vert f\rangle \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \vert c_n\vert^2 = \vert\vert f\vert\vert^2$ [Parseval]	$\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$ [C.-R.]