| Übungen zu MMP III | **Blatt Nr. 10** | Tutorium 25.11.2016 |
|---|---|---|

**Aufgabe 1:** Betrachtet wird $Q_0(z) := \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}$.

(a) Bestimmen Sie $\frac{1}{2}[Q_0(x+i0^+) - Q_0(x-i0^+)]$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie ebenfalls $\frac{1}{2}[Q_0(x+i0^+) + Q_0(x-i0^+)]$, $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2:** Betrachtet wird die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(z)$, die für $\mathrm{Re}(z) > 1$ als

$$\zeta(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\, t^{z-1}}{e^t - 1}$$

definiert werden kann, dabei ist $\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1} e^{-t}$ die Eulersche Gamma-Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $\zeta(z)$ als $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ dargestellt werden kann.

(b) Leiten Sie die alternative Darstellung

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\, t^{z-1}}{e^t + 1}\,, \quad \mathrm{Re}(z) > 0\,,$$

her. [Hinweis: $\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{t/2}-1} - \frac{1}{e^{t/2}+1}\right)$.]

(c) Verifizieren Sie als Limes $z \to 0^+$ das merkwürdige Ergebnis $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ $\left[= \text{„} \sum_{n=1}^\infty \text{“!}\right]$.
Warum gibt es hier keinen Grund zur Sorge?

[Hinweis: Es gibt Divergenzen in $\Gamma(z)$ sowie im $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\, t^{z-1}}{e^t+1}$; beide stammen von kleinen Werten von $t$; betrachten Sie deshalb den Beitrag des Intervalls $t \in (0, \epsilon)$, $\epsilon \ll 1$.]

**Aufgabe 3:**

(a) Ermitteln Sie eine Laurent-Reihe von $\frac{1}{z-2}$ mit dem Konvergenzkreis $|z| < 2$.

(b) Ermitteln Sie eine Laurent-Reihe von $\frac{1}{z-2}$ die für $|z| > 2$ konvergiert.

(c) Ermitteln Sie eine Laurent-Reihe von $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ mit Konvergenzkreisring $2 < |z| < 3$.