Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 08**	Tutorium 11.11.2016

Aufgabe 1:

(a) Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^5 = 1 \ , \quad z^4 = -1 \ , \quad z^3 = -i \ .$$

(b) Trigonometrische Funktionen mit komplexen Argumenten können mittels der Exponentialfunktion definiert werden, z.B. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, usw. Ermitteln Sie alle Nullstellen von $\cosh z$ und $\sin z$.

Aufgabe 2:

(a) Aus einer analytischen Funktion $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei bekannt, dass $v(x, y) = e^{-y} \sin x$ gilt. Bestimmen Sie $w(z)$.

(b) Verifizieren Sie, dass die gefundene Lösung die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ .$$

(c) Zeigen Sie, dass diese Gleichungen sogar bei allen analytischen Funktionen gelten.

Aufgabe 3:

(a) Betrachtet wird die Funktion e^z. Skizzieren Sie das Bild der Kurve $z(t) = 2\pi(1 + i)t$, $t \in [0, 1]$, in der Abbildung $z \mapsto e^z$.

(b) Welche Form haben Funktionen, die einer Drehung um einen beliebigen Punkt z_0 in der komplexen Ebene entsprechen?

(c) Beantworten Sie die Frage (b) auch für Spiegelungen an einer Geraden, die durch z_0 mit dem Gradienten $v \in \mathbb{C}$ läuft.