| Übungen zu MMP III | **Blatt Nr. 07** | Tutorium 04.11.2016 |
| --- | --- | --- |

**Aufgabe 1:** Wenn $\lambda_n$ und $v_n$ Eigenwerte und orthonormierte Eigenfunktionen sind,

$$\mathscr{L} v_n(x) + \lambda_n w(x) v_n(x) = 0 \ ,$$

hilft die Greensche Funktion $G(x;y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^*(y)}{\lambda_n}$ uns zur Lösung von $\mathscr{L} f(x) + g(x) = 0$ durch

$$f(x) = \int_a^b \mathrm{d}y \, G(x;y) g(y) \ .$$

Interpretieren Sie diese Gleichungen in der Sprache der Matrizen. Welche Matrix entspricht der Greenschen Funktion? Welche Rolle spielt die Bedingung dass es keinen Nulleigenwert gibt?

**Aufgabe 2:** Die „modifizierte Helmholtz-Gleichung" lautet

$$\left( \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - k^2 \right) f(x) = g(x) \ .$$

(a) Bestimmen Sie die entsprechende Greensche Funktion mit den Randbedingungen

$$\lim_{x \to -\infty} G(x;y) = \lim_{x \to +\infty} G(x;y) = 0 \ .$$

[Antwort: $\frac{1}{2k} \exp(-k|x-y|)$.]

(b) Ermitteln Sie die Lösung $f(x)$ für den Fall $g(x) = \theta(x-a)\theta(b-x)$, $a < b$.

**Aufgabe 3:** Die Besselsche Differenzialgleichung lautet

$$x^2 J_m''(x) + x J_m'(x) + (x^2 - m^2) J_m(x) = 0 \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihendarstellung

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{m+2n}$$

die Differenzialgleichung löst.

(b) Verifizieren Sie auch, dass die Besselsche Differenzialgleichung aus den folgendenen Rekursionsbeziehungen hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x) \ , \\ J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= 2 J_m'(x) \ . \end{aligned}$$

[Hinweis: Arfken 14.1]