Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 06**	Tutorium 28.10.2016

Aufgabe 1: Betrachtet werden die Funktionen

$$u_n(x) = x^n \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots \ , \quad -\infty < x < \infty \ , \quad w(x) = e^{-x^2} \ .$$

Die Hermiteschen Polynome bilden eine orthogonale Menge bzgl. der genannten Gewichtsfunktion und werden aus historischen Gründen als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, w(x) H_m(x) H_n(x) = \delta_{mn} \, 2^m \, m! \, \sqrt{\pi}$$

normiert. Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens die Hermiteschen Polynome H_0, H_1, H_2. [Antwort: Wie in der Aufgabe 5.2.]

Aufgabe 2: Betrachtet werden Legendre-Polynome, welche z.B. als reguläre Lösungen der Differenzialgleichung in Aufgabe 4.2 definiert werden können.

(a) Sei $f_2(x)$ ein beliebiges Polynom zweiten Grades, $f_2(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2$, $|x| < 1$. Ermitteln Sie eine Darstellung von $f_2(x)$ in der Basis der Legendre-Polynome. [Hinweis: Ihre „Standardnormierung“ lautet $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, mit $P_n(1) = 1$.]

(b) Sei $f_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{k!}$ eine abgebrochene Taylor-Entwicklung um $x = 0$. Zeigen Sie, dass auch diese für $|x| < 1$ *eindeutig* als Linearkombinationen von Legendre-Polynomen dargestellt werden kann, d.h. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$.

Aufgabe 3: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung der linearen Algebra lautet $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| \, |\vec{w}|$.

(a) Zeigen Sie, dass in einem hermiteschen Funktionenraum eine ähnliche Gleichung gilt:

$$|\langle f | g \rangle| \leq ||f|| \, ||g|| \ .$$

[Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass $|\langle f | g \rangle|^2 \leq ||f||^2 \, ||g||^2$ gilt.]

(b) Ein Differenzialoperator $\mathscr{H}$ sei hermitesch und „positiv definit“, d.h.

$$\langle f | \mathscr{H} f \rangle > 0 \quad \forall \, |f\rangle \neq |0\rangle \ .$$

Verifizieren Sie die Gültigkeit der folgenden verallgemeinerten Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|\langle f | \mathscr{H} g \rangle|^2 < \langle f | \mathscr{H} f \rangle \, \langle g | \mathscr{H} g \rangle \ .$$

[Hinweis: Als Ausgangspunkt kann $\langle f - \lambda g | \mathscr{H} (f - \lambda g) \rangle > 0$, mit $\lambda \in \mathbb{C}$, dienen.]