Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 05**	Tutorium 21.10.2016

Aufgabe 1: Betrachtet wird der Differenzialoperator $\mathscr{P} \equiv -i\hbar\partial_x$ auf dem Intervall $x \in]0, L[$, im Raum von periodischen komplexen Funktionen, d.h. $\psi(L) = \psi(0)$, $\psi \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{P}$ mit diesen Randbedingungen hermitesch ist.

(b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathscr{P}$ [d.h. $\mathscr{P}\psi_n(x) = p_n\psi_n(x)$].

(c) Verifizieren Sie, dass die Eigenwerte reell ($p_n \in \mathbb{R}$) und die Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal zueinander sind, mit Gewichtsfunktion 1.

(d) Ermitteln Sie eine Variablentransformation, wobei die Eigenfunktionen von $\mathscr{P}$ als Basisfunktionen der komplexen Fourier-Reihendarstellung betrachtet werden können.

Aufgabe 2: Betrachtet wird die Schrödinger-Gleichung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E_n\psi(x) \ , \quad -\infty < x < \infty \ .$$

Diese soll mit der sogenannten Hermiteschen Differenzialgleichung,

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0 \ ,$$

in Verbindung gebracht werden.

(a) Verifizieren Sie, dass es die Hermiteschen Polynome $H_0(y) = 1$, $H_1(y) = 2y$, $H_2(y) = 4y^2 - 2$ Lösungen der Hermiteschen Differenzialgleichung sind.

(b) Zeigen Sie, dass wenn ein Polynom des Grades m die Hermitesche Differenzialgleichung löst, dann geschieht dies unbedingt mit dem Eigenwert $m = n$, und dass in diesem Polynom immer entweder nur gerade oder ungerade Potenzen auftauchen.

(c) Zeigen Sie, dass die Hermitesche Differenzialgleichung durch Multiplikation mit $w(y) = e^{-y^2}$ in eine selbstadjungierte Form gebracht werden kann.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_n(y) = e^{-y^2/2}H_n(y)$ mit Gewichtsfunktion 1 orthogonal zueinander sind, und die folgende Differenzialgleichung erfüllen:

$$\phi_n''(y) + (2n + 1 - y^2)\phi_n(y) = 0 \ . \tag{1}$$

(e) Verifizieren Sie letztendlich, dass die Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators durch die Substitutionen

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}\epsilon_n \ , \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, y$$

genau die Form von (1) übernimmt, mit $\epsilon_n = 2n + 1$.