| Übungen zu MMP III | **Blatt Nr. 04** | Tutorium 14.10.2016 |
| --- | --- | --- |

**Aufgabe 1:** Die Laguerre-Gleichung lautet

$$xf'' + (1-x)f' + nf = 0\ , \quad x > 0\ , \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}\ .$$

(a) Verifizieren Sie, dass die Polynome aus Aufgabe 2.1(c) diese Gleichung erfüllen.

(b) Zeigen Sie, durch Multiplikation mit $e^{-x}$, dass der Differenzialoperator in Form eines selbstadjungierten Operators gebracht werden kann, und dass die Gewichtsfunktion dann $w(x) = e^{-x}$ ist, genau wie in Aufgabe 2.1.

**Aufgabe 2:** Die Legendre-Gleichung lautet

$$(1-x^2)f'' - 2xf' + n(n+1)f = 0\ , \quad -1 \leq x \leq 1\ , \quad n \in \{0, 1, 2, ...\}\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $u(x) := x$ und $v(x) := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ Lösungen der Legendre-Gleichung sind. Welche sind die entsprechenden Eigenwerte (d.h. $n(n+1)$)?

(b) Ermitteln Sie den Wert von $\langle u|v\rangle = \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\, u(x)v(x)$.

(c) Warum sind $u(x)$ und $v(x)$ nicht orthogonal zueinander?

**Aufgabe 3:** Die Funktionen $u_n(x)$, $u_m(x)$ genügen der Sturm-Liouville-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda_n w(x) u_n(x) = 0\ ,$$

und seien orthogonal zueinander. (Die entsprechenden Eigenwerte $\lambda_n$, $\lambda_m$ seien ungleich.) Zeigen Sie, dass $u_n'(x)$ und $u_m'(x)$ auch orthogonal zueinander sind, mit $p(x)$ als Gewichtsfunktion, wenn angemessene Randbedingungen erfüllt sind.