Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 03**	Tutorium 11.10.2016

Aufgabe 1: Betrachtet wird die Folge

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2n} \end{cases} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \ .$$

(a) Bestimmen Sie die entsprechenden Fourier-Transformierten, $\tilde{\delta}_n(k)$. [Antwort: $\frac{2n}{k}\sin(\frac{k}{2n})$]

(b) Argumentieren Sie, anhand der Antwort aus (a), dass $\lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \delta(x)$ gilt. [Hinweis: Welcher Eigenschaft von $\tilde{\delta}_n(k)$ entspricht die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\delta(x) = 1$?]

(c) Argumentieren Sie, anhand der Fourier-Rücktransformation, dass die Diracsche Deltafunktion formal auf folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,e^{ikx} \ .$$

[Hinweis: Vertauschen Sie die Ordnung von Limes und Integration.]

Aufgabe 2: Die Laplace-Transformation einer Funktion $f(x)$ sei definiert als

$$\tilde{f}(k) := \mathscr{L}[f(x)] := \int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)e^{-kx} \ .$$

(a) Bestimmen Sie $\mathscr{L}[\cos\alpha x]$ und $\mathscr{L}[\sin\alpha x]$.

(b) Die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators,

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\phi(t) = 0 \ , \quad \phi(0) = \phi_0 \ , \quad \dot{\phi}(0) = 0 \ ,$$

soll mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Zeigen Sie zuerst, dass die Laplace-Transformierte $\tilde{\phi}(k) := \mathscr{L}[\phi(t)]$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$k^2\tilde{\phi}(k) - k\phi_0 + \omega^2\tilde{\phi}(k) = 0 \ .$$

(c) Lösen Sie die Gleichung aus (b) und ermitteln Sie, anhand von Antworten aus (a), die Rücktransformierte. [Antwort: $\phi(t) = \phi_0\cos(\omega t)$.]

Aufgabe 3: Lösen Sie die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators ebenfalls mit Hilfe einer Fourier-Transformation. [Hinweis: Die Anfangsbedingungen können wahrscheinlich erst nach Rücktransformation gestellt werden.]