Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 02**	Tutorium 30.09.2016

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{P}$ der euklidische Vektorraum der reellen Polynome mit dem durch $\langle P|Q\rangle := \int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}\, P(x)\, Q(x)$ definierten Skalarprodukt, und $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$ der Untervektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine Folge $(L_n)_{n\geq 0}$ von Orthogonalpolynomen (d.h. $\langle L_n|L_m\rangle = \delta_{nm}$) vom Grade n gibt, welche $L_n(0) > 0$ erfüllt (Laguerre-Polynome).

(b) Weshalb ist $(L_0, \ldots, L_n)$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$?

(c) Berechnen Sie $L_n(x)$ für $n = 0, 1, 2$. [Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}\, x^n = n!$.]

Aufgabe 2: Betrachtet wird die 2π-periodische Treppenfunktion

$$\phi_a(y) := \begin{cases} 1, & y_0 \leq y < y_0 + a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad 0 \leq y < 2\pi \; , \quad y_0 > 0 \; , \quad a > 0 \; , \quad y_0 + a < 2\pi \; .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Beträge der (komplexen) Fourier-Koeffizienten, $|\gamma_n|$, unabhängig von y_0 sind.

(b) Ermitteln Sie γ_n für die Wahl $y_0 = 0$.

(c) Verifizieren Sie, dass die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen ϕ_a konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\phi_a\|^2 \; .$$

[Hinweis: $\gamma_0 = \frac{a}{2\pi}$; $|\gamma_n| = |\frac{\sin(an/2)}{\pi n}|$, $n \neq 0$; $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(an)}{n^2} = \frac{a^2}{4} - \frac{a\pi}{2} + \frac{\pi^2}{6}$, $0 < a < 2\pi$.]

Aufgabe 3: Sei

$$t(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \; .$$

Wie müssen die Koeffizienten α_k, β_k gewählt werden, damit der Abstand von t zu einer Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definiert als

$$d(f,t) := \|f - t\| := \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |f(x) - t(x)|^2\right)^{1/2} \; ,$$

minimal wird? [Hinweis: $d(f,t)$ ist minimal wenn $d^2(f,t)$ minimal ist.]