Übungen zu MMP III	**Blatt Nr. 01**	Tutorium 23.09.2016

Zur Erinnerung (lineare Algebra):

- Ein *reeller Vektorraum* V besitzt folgende Strukturen: (i) *Addition*: $\vec{u}+\vec{v} \in V$; (ii) *Skalarmultiplikation*: $\lambda\vec{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (iii) *Nullvektor*: $\vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$; (iv) *Inverse*: $\vec{v} + (-\vec{v}) =: \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$.
- Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bilden eine *Basis*, wenn sie linear unabhängig sind und ihre lineare Hülle ganz V ist.
- Eine *lineare Abbildung* hat die Eigenschaften $A(\vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u}) + A(\vec{v})$, $A(\lambda\vec{v}) = \lambda A(\vec{v})$.
- *Bild* einer Abbildung: Bild$A := A(V) := \{A(\vec{v})|\vec{v} \in V\}$. *Kern* einer Abbildung: Kern$A := A^{-1}(\vec{0}) := \{\vec{v} \in V|A(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
- Eine *Gruppe* besteht aus einer Menge G und einer Verknüpfung „$\cdot$" mit den Eigenschaften: (i) $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$ (*Abgeschlossenheit*); (ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativität*); (iii)$\exists e \in G$ mit $e \cdot a = a\ \forall a$ (*Einselement*); (iv) $\forall a\ \exists a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \cdot a = e$ (*Inverse*). Eine Gruppe heisst *abelsch*, wenn $a \cdot b = b \cdot a$.
- Eine Teilmenge $H \subset G$ mit den Eigenschaften (i) $a \cdot b \in H\ \forall a, b \in H$; (ii) $e \in H$; (iii) $a^{-1} \in H\ \forall a \in H$; heisst eine *Untergruppe* von G. Ähnlich wird ein *Untervektorraum* definiert.
- *Summe* von Untervektorräumen: $U + V = \{\vec{u} + \vec{v}|\vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}$. *Direkte Summe*: $U + V =: U \oplus V$ falls $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- Ein *Körper* hat *zwei* Verknüpfungen (d.h. zwei Gruppenstrukturen), oft genannt Addition und Multiplikation, und Nullelemente und Inversen bzgl. beiden. Beispiele sind die Körper von reellen und komplexen Zahlen. Die Komponenten eines Vektors bzgl. einer Basis müssen einem Körper angehören.

Aufgabe 1:

(a) Weisen Sie mit Hilfe einer Multiplikationstabelle nach, dass die untenstehenden Matrizen eine Gruppe bilden, mit Matrixmultiplikation als Verknüpfung (diese wird die „Kristallgruppe D_4" genannt).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{2x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{2y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{2z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{2c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{4y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{4y}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ist die Gruppe abelsch?

(c) Geben Sie Beispiele von Untergruppen.

Aufgabe 2: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung $P : U \to U$ heisst eine Projektion, wenn $P \circ P = P$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Projektion $U = \text{Kern}P \oplus \text{Bild}P$ gilt.
[Hinweis: Drücken Sie $\vec{x} \in U$ als $\vec{x} = (\mathbb{1} - P)(\vec{x}) + P(\vec{x})$ aus.]

(b) Gibt es umgekehrt zu jeder Zerlegung $U = U_1 \oplus U_2$ eine Projektion $P : U \to U$ mit Kern $P = U_1$ und Bild $P = U_2$?

Aufgabe 3: Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ergänze die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ des $\mathbb{R}^3$ zu einer Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}\}$. Die Abbildung P: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die (x, y)-Ebene längs der Richtung von $\vec{a}$. Mann kann also das Bild $P(\vec{x})$ anschaulich als das *Schattenbild* von $\vec{x}$ bei einer Beleuchtung in Richtung von $\vec{a}$ interpretieren.

(a) Ermitteln Sie P als Matrix bezüglich der Standardbasis. [Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1/a_3 \\ 0 & 1 & -a_2/a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.]

(b) Zeigen Sie, dass $P^2 = P$ gilt, also dass P „idempotent" ist.

(c) Berechnen Sie die Matrix $Q:=\mathbb{1} - P$ der komplementären Projektion, und zeigen Sie, dass $PQ = QP$ eine Nullmatrix ist.