3.3 Cauchy-Formel und Korollare [Arfken 11.4]

Obwohl der Residuensatz (Seite 47) für die meisten praktischen Anwendungen (vgl. Kap. 3.4) hinreichend ist, können viele theoretische Aussagen zu analytischen Funktionen am besten anhand einer weiteren Umformulierung, der „Cauchy-Formel", begründet werden.

Cauchy-Formel: Sei $f(z)$ analytisch in G und $z_0 \in G$. Dann ist

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = f(z_0) \qquad (*)$$

sowie, laut Residuensatz, $\oint_\gamma dz \, \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i \, \nu_\gamma(z_0) f(z_0)$. Es folgt

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i \, \nu_\gamma(z_0)} \oint_\gamma dz \, \frac{f(z)}{z-z_0}} \quad \text{wenn } \nu_\gamma(z_0) \neq 0,$$

wobei γ eine geschlossene Kurve in G ist, die keinen Punkt ausserhalb von G umläuft.

Beweis von (*): Seite 47 $\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} dz \, \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} dz \, \frac{f(z_0)}{z-z_0}}_{2\pi i \ (\text{Seite } 42)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} dz \, \underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{\substack{\text{Limes } z\to z_0 \text{ existiert} \\ \Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \le C \\ \Rightarrow \left|\oint dz \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \le 2\pi\varepsilon C}} .$$

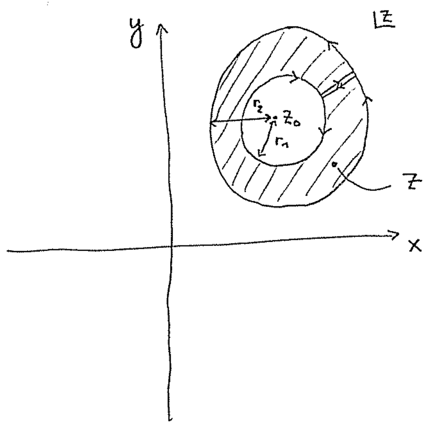
(vgl. Aufgabe 11.3)

$$\overset{\varepsilon\to 0}{=} f(z_0) \quad \square.$$

Bemerkungen:

- * Die Werte von f an den von γ umgelaufenen Punkten lassen sich eindeutig aus Werten längs γ berechnen!
- * Wenn z_0 nicht umgelaufen wird, ist $\nu_\gamma(z_0) = 0$, und deshalb $\boxed{\oint_\gamma dz \, \frac{f(z)}{z-z_0} = 0}$.

Spezialfall: Für alle z mit $r_1 < |z-z_0| < r_2$ gilt



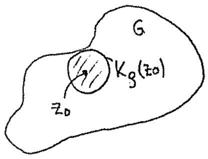
$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{\text{äusserer Kreis}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{\text{innerer Kreis}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{\text{Nebenteil!}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}}_{\text{Hauptteil!}}$$

(vgl. Seiten 36, 50)

Korollare

(i) Potenzreihenentwicklungssatz:



Sei $f(z)$ analytisch im G und die offene Kreisscheibe $K_\varrho(z_0)$ liege ganz im G. Dann lässt sich $f(z)$ in eine gleichmässig konvergente Potenzreihe entwickeln (vgl. S.33):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall\ z \in K_\varrho(z_0),$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad , \quad 0 < \varepsilon < \varrho .$$

Beweis: Laut Cauchy-Formel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} .$$

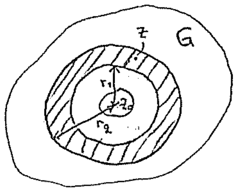
Schreibe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}_{\text{Betrag} < 1\,!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} .$$

Weil die Reihe bei $|z-z_0| < |\zeta - z_0|$ absolut konvergent ist, kann sie gliedweise integriert werden $\Rightarrow \square$.

(ii) Laurent-Reihenentwicklungssatz:



Sei $f(z)$ analytisch im G und der Kreisring $\{z \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ liege ganz im G. Dann lässt sich $f(z)$ in diesem Ring in eine gleichmässig konvergente Laurent-Reihe entwickeln (vgl. S.36):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad r_1 < |z-z_0| < r_2 .$$

Beweis: „Spezialfall" aus Seite 49; beim Nebenteil wie oben ($|z-z_0| < |\zeta - z_0| = r_2$); beim Hauptteil benutze $|z-z_0| > |\zeta - z_0| = r_1$, und entwickle als

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}_{\text{Betrag} < 1\,!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$\overset{\boxed{\begin{array}{l} n+1 =: -n' \\ n = -1-n' \end{array}}}{=} \sum_{n'=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^{n'}}{(\zeta - z_0)^{n'+1}} .$$

D.h.
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r_2} d\zeta \, \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} , & n \geq 0 ; \\[2em] \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r_1} d\zeta \, \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} , & n \leq -1 . \end{cases}$$

(iii) Differenzierbarkeit: Analytische Funktionen sind nicht nur, wie die Definition angibt, einmal, sondern beliebig oft komplex differenzierbar („C^∞").

Beweis: Für den Beweis der Cauchy-Formel wurde einmalige Differenzierbarkeit verlangt. Als Folge finden wir aber eine absolut konvergente Potenzreihe um z_0 (vgl. Seite 50). Diese kann dann gliedweise differenziert werden:

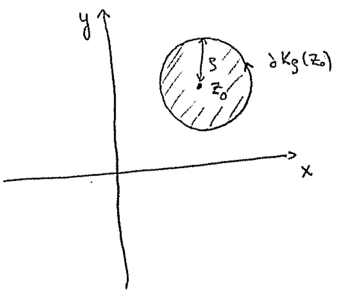
$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k! \quad \Leftrightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

(wie bei Taylor-Entwicklung)

(iv) Satz von Liouville (1809–1882): Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte ganze Funktion, d.h. f ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq c \;\forall z$.

Dann ist f konstant!

Beweis: Sei $K_\rho(z_0)$ eine Kreisscheibe um z_0 und $\partial K_\rho(z_0)$ ihr Rand. Benutze Cauchy-Formel:



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(z_0)} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$

$$= \lim_{\delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i \, \delta z} \left\{ \oint_{\partial K_\rho(z_0+\delta z)} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - \delta z} - \oint_{\partial K_\rho(z_0)} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right\}$$

Diesen Kreisring darf man zurück an z_0 verschieben, ohne $f(z_0+\delta z)$ zu ändern!

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(z_0)} d\zeta \, f(\zeta) \frac{d}{dz_0} \frac{1}{\zeta - z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(z_0)} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}$$

Aufgabe 11.3

$$\Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{c}{\rho^2} = \frac{c}{\rho}.$$

Schicke $\rho \to \infty \Rightarrow |f'(z_0)| \leq 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$

Dies gilt für alle $z_0 \Rightarrow f = \text{const} \;\forall z \in \mathbb{C}$ □.

Folge: Wenn f nicht konstant ist, hat sie unbedingt Singularitäten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$! (vgl. Kap. 2.3)

(v) Fundamentalsatz der Algebra:

Sei $P_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades, d.h.

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad ; \quad a_n \neq 0 .$$

Dann ist $P_n(z)$ der Form $P_n(z) = (z - z_n) P_{n-1}(z)$, d.h. hat eine Nullstelle. Und induktiv:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) ,$$

d.h. hat n Nullstellen (manche können gleich sein).

Beweis:

(1777–1855)

erster vollständiger Beweis von Gauss 1799 mit anderen Methoden

Wenn $P_n(z)$ keine Nullstellen hat, dann ist die Funktion $\frac{1}{P_n(z)}$ überall analytisch (vgl. S. 31) und beschränkt.

Denn, $|P_n(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$

(der Term $a_n z^n$ dominiert in jede Richtung; hier sollte man mathematisch genauer sein),

und deshalb $\frac{1}{|P_n(z)|} \to 0$ für $|z| \to \infty$.

Laut Liouville wäre $\frac{1}{P_n(z)}$ konstant $\Rightarrow$ ↯.

(vi) Cauchysche Ungleichung

(verwandt mit Satz von Liouville; allgemeiner)

Sei $c(\rho)$ maximaler Wert von $|f(z)|$ auf $\partial K_\rho(z_0)$.

Wenn $f(z)$ in G und in $K_\rho(z_0) \subset G$ analytisch ist, kann sie als Potenzreihe entwickelt werden (vgl. Seite 50), mit Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(z_0)} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} .$$

Diese sind beschränkt im Betrag:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{c(\rho)}{\rho^{n+1}} = \frac{c(\rho)}{\rho^n} .$$

Aufgabe 11.3

Je grösser G und deshalb ρ, desto schneller müssen die $|a_n|$ mit n abnehmen.

Wenn f überall analytisch ist, d.h. $G = \mathbb{C}$, kann $\rho \to \infty$ geschickt werden, und wenn f auch beschränkt bleibt, d.h. $\lim_{\rho \to \infty} c(\rho) < \infty$, dann kann nur $|a_0|$ nichttrivial bleiben. Die Funktion ist also konstant.

— · — · —