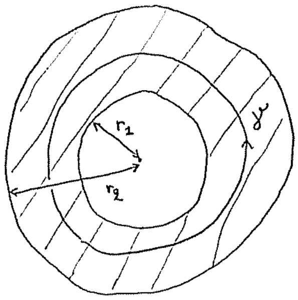
3.2 Cauchyscher Integralsatz, Residuensatz [Arfken 11.3,7]

Wir haben gesehen, dass wenn γ ganz in einem Gebiet verläuft, in dem f eine Stammfunktion besitzt, so ist $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$ (vgl. Seiten 41, 44).

Man kann aber die Aussagen zu geschlossenen Integrationswegen noch verstärken.



Beispiel: Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ eine für $r_1 < |z| < r_2$ konvergente Laurent-Reihe, und ist $r_1 < r < r_2$, so gilt

$$\oint_{|z|=r} dz\, f(z) = \oint_{|z|=r} dz\, \frac{a_{-1}}{z} = 2\pi i\, a_{-1}.$$

Insbesondere verschwindet das Integral wenn $a_{-1} = 0$; a_{-1} heisst das Residuum der Laurent-Reihe.

Beweis: Integriere gliedweise und benutze (iii), (v) aus Seite 42.

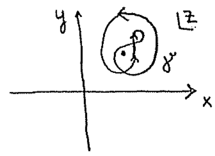
Umlaufszahl: Sei γ eine geschlossene Kurve*, welche nicht durch z_0 geht. Dann heisst die Zahl

$$\nu_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

die Umlaufszahl um z_0. Sie gibt an, wie oft γ den Punkt z_0 im positiven Sinne umläuft.

*Um genauer zu sein: eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, denn $\frac{d\gamma}{dt}$ muss (ausser Knicke) existieren.

Beispiel: $\oint_\gamma \frac{dz}{z(z-(1+i))}$ mit Kurve



Entwicklung um $z = 1+i$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i + z-(1+i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

Diese konvergiert bei $|z-(1+i)| < \sqrt{2}$. Es folgt:

$$\frac{1}{z(z-(1+i))} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{z-(1+i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^{n-1}}{(1+i)^{n+1}}.$$

Umlaufszahl: $+2$.

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{dz}{z(z-(1+i))} = \underbrace{2}_{\nu_\gamma(1+i)} \cdot 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{1+i}}_{a_{-1}} = \frac{4\pi i}{1+i},$$

denn alle anderen Terme besitzen eine Stammfunktion.

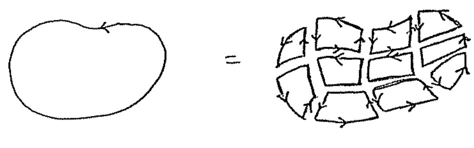
Cauchyscher Integralsatz: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch und γ eine geschlossene Kurve in G, die keinen nicht zu G gehörenden Punkt umläuft, d.h. $\nu_\gamma(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{C} \setminus G$.
Dann gilt $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$.

Bemerkung: Hier gibt es keine Rede über die Stammfunktion oder eine überall in G konvergente Laurent-Reihe; es geht deshalb um eine Verallgemeinerung.

Anschauliche Bedeutung:

Beweis (Skizze): (à la Goursat 1858-1936)

Weil $\int_{-\gamma} dz\, f(z) = -\int_\gamma dz\, f(z)$ gilt (vgl. Seite 44), darf man γ durch ein Netz kleiner Maschen ersetzen:



Innerhalb jeder Masche nutzt man komplexe Differenzierbarkeit:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)^2 .$$

Die Integrale über $f(z_0)$ und $f'(z_0)(z-z_0)$ verschwinden exakt, weil Stammfunktionen existieren.

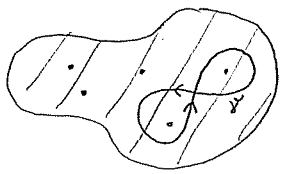
Der fehlende (und entscheidende) Schritt ist zu zeigen, dass auch die Beiträge der Fehlerterme verschwinden, wenn die Maschen klein genug gemacht werden.

(Intuitiv: Sei ε Kantenlänge bzw. Radius einer Masche.
Anzahl Maschen $\sim \frac{1}{\varepsilon^2}$;
Umfangslänge $\sim \varepsilon$;
Gesamtbeitrag $\sim \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \varepsilon \cdot \mathcal{O}(\varepsilon^2) \sim \mathcal{O}(\varepsilon) \to 0$.)

vgl. Aufgabe 11.3

Der Cauchysche Integralsatz kann noch verallgemeinert werden, indem isolierte Pole (vgl. Seite 37) mit einbezogen werden.

<u>Residuensatz</u>: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch bis auf isolierte Singularitäten, und γ eine geschlossene Kurve in G, die keine der Singularitäten trifft und keinen Punkt ausserhalb von G umläuft. Dann gilt



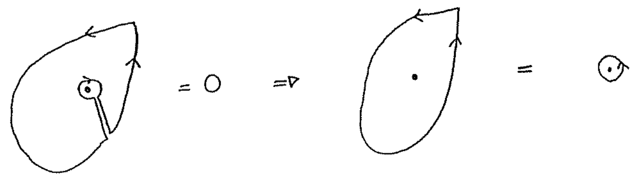
$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{p \in G} \nu_\gamma(p)\, \mathrm{Res}_p f}\,,$$

wobei

$$\mathrm{Res}_p f := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, f(z)$$

das Residuum von f am Pol z_p heisst.

<u>Begründung</u>: (i) Benutze den Cauchyschen Integralsatz, um nah an die Singularitäten zu gelangen:



(ii) Mit selbem Argument ist

$$\odot = \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, f(z)$$

unabhängig von $\varepsilon > 0$, und deshalb eine wohlbestimmte komplexe Zahl. Wenn durch $2\pi i$ dividiert wird sie das Residuum genannt.

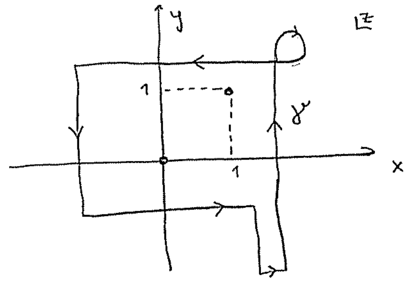
(iii) Wenn ε so klein gewählt wird, dass eine Laurent-Reihe um z_p konvergiert, erhalten wir (vgl. Seiten 36, 42, 45)

$$\mathrm{Res}_p f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_p)^n$$

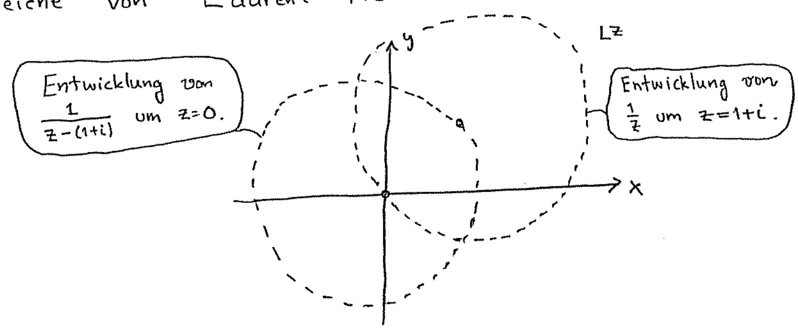
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, \frac{a_{-1}}{z-z_p} = a_{-1}\,.$$

<u>Bemerkung</u>: Normalerweise werden Pole nur einmal umgelaufen, deshalb ist $\nu_\gamma(p) = \pm 1$.

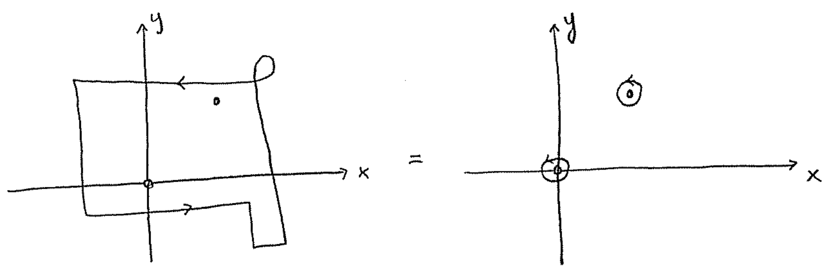
Beispiel: $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z\,(z-(1+i))}$ mit



Konvergenzbereiche von Laurent-Reihen:



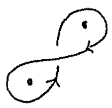
Diese können also <u>nicht</u> direkt benutzt werden. Auch wollen wir wegen Schlitze nicht unbedingt Stammfunktionen benutzen. Aber mit Residuensatz ist es einfach:



Beitrag vom $z=0$: $\oint\limits_{|z|=\varepsilon} \underbrace{\frac{dz}{z\,(z-(1+i))}}_{\text{kann entwickelt werden}} = \frac{1}{-1-i} \oint\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{-1-i}$

Beitrag vom $z=1+i$: $\oint\limits_{|z-(1+i)|=\varepsilon} \underbrace{\frac{dz}{z\,(z-(1+i))}}_{\text{kann entwickelt werden}} = \frac{1}{1+i} \oint\limits_{|z-(1+i)|=\varepsilon} \frac{dz}{z-(1+i)} = \frac{2\pi i}{1+i}$.

Eine andere Kurve mit demselben Integrand kann ein anderes Ergebnis liefern, z.B.



$\neq 0$.

Insgesamt: $2\pi i\left(-\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+i}\right) = 0$!

Numerisch:
(ein wenig vereinfacht)

```
In[1]:= f[x_, y_] := 1 / (x + I y) / (x + I y - 1 - I)
In[2]:= teil1 = NIntegrate[f[x, -1], {x, -3, 5}]
Out[2]= -0.442952 + 0.0348033 i
In[3]:= teil2 = NIntegrate[I f[5, y], {y, -1, 4}]
Out[3]= 0.0594231 + 0.175589 i
In[4]:= teil3 = NIntegrate[f[x, 4], {x, 5, -3}]
Out[4]= 0.281191 + 0.0338429 i
In[5]:= teil4 = NIntegrate[I f[-3, y], {y, 4, -1}]
Out[5]= 0.102338 - 0.244235 i
In[6]:= teil1 + teil2 + teil3 + teil4
Out[6]= -4.94049 × 10^-15 + 1.21569 × 10^-14 i
```