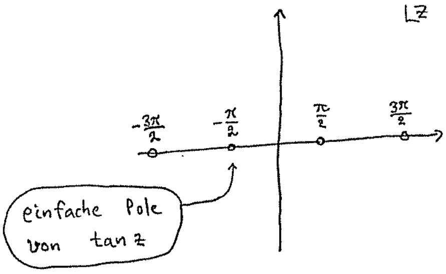
2.3 Singularitäten, analytische Fortsetzung [Arfken 11.6; 13.1]

Wie wir bei Laurent-Reihen (vgl. Seite 36) sowie Logarithmus (vgl. Seite 35) gesehen haben, sind analytische Funktionen im Allgemeinen auf punktierten oder geschlitzten Gebieten definiert. Erstaunlicherweise sind sie ausser dieser „niedrigdimensionalen Singularitäten" überall definiert und eindeutig!

„Nulldimensionale" Singularitäten:

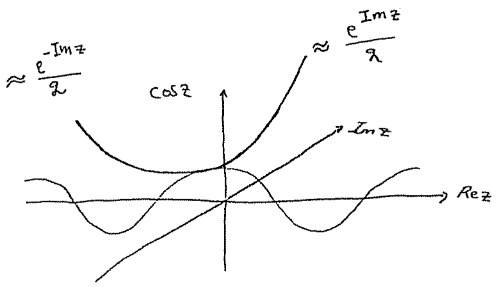
* Der Punkt z_0 sei ein „isolierter Pol" von $f(z)$, falls $f(z)$ nicht bei z_0 aber bei allen naheliegenden Punkten analytisch ist.
  Anhand der Laurent-Reihe bedeutet dies, dass $f(z)$ die Entwicklung
  $$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots$$
  hat, wobei z_0 ein N-facher Pol ist.



* Eine Funktion ohne Pole im $\mathbb{C}$ heisst ganz oder holomorph, z.B. e^z; eine Funktion mit nur isolierten Polen heisst meromorph, z.B. $\tan z$.

* Wenn $N \to \infty$ geht es um eine wesentliche Singularität, z.B. $z=0$ bei
  $$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}.$$
  Dann ist auch $(z-z_0)^k f(z)$ singulär bei $z=z_0$ für $\forall\, k$.

* Das Verhalten von $f(z)$ bei $z \to \infty$ kann durch das Verhalten von $f(\frac{1}{w})$ bei $w=0$ untersucht werden.
  Beispiel: $\cos(\frac{1}{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{w^{2n}}$,



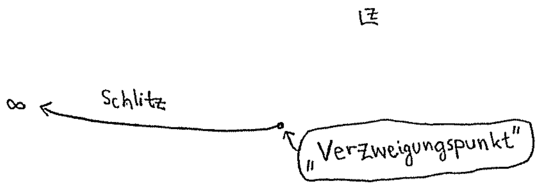
  d.h. $\cos(z)$ hat eine wesentliche Singularität bei $z \to \infty$.
  Der Grund liegt darin, dass $\cos(z)$ entlang der imaginären Achse exponentiell wächst.

* Die einzige analytische Funktion, die keine Singularitäten auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat, ist $f(z) = \text{const.}$ (Beweis: Seite 51).

„Eindimensionale" Singularitäten:

Bei eindimensionalen Singularitäten handelt es sich um Schlitze. Die Diskussion bezieht sich dann auf den Hauptzweig einer Funktion; wenn man stattdessen in eine andere „riemannsche Fläche" übergeht, bleibt die Funktion analytisch.

Beispiele:



* $f(z) = z^{1/2}$ hat einen Schlitz, denn

$$(e^{i\pi})^{1/2} = i \neq (e^{-i\pi})^{1/2} = -i \; .$$

Auch $f(\frac{1}{w}) = w^{-1/2}$ hat einen Schlitz; d.h. Schlitz läuft von 0 bis ∞. Wo der Schlitz genau liegt, hängt von der Konvention ab.

* $f(z) = (z^2-1)^{1/2} = (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}$.

Schlitze öffnen bei $z=1$ und $z=-1$.

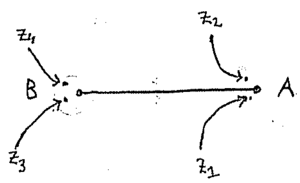
Und $z \to \infty$?

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \left(\frac{1}{w^2}-1\right)^{1/2} = \frac{1}{w}\left(1-w^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{w} - w + O(w^3)$$

kein Schlitz; einfacher Pol!

Man kann noch checken, dass die Funktion nur zwischen den Verzweigungspunkten unstetig ist:



Bei A ist $z+1 \approx 2$ aber $z-1 \approx \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$, wobei

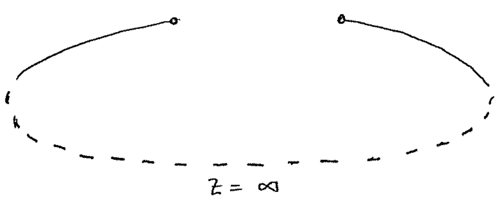
$$\frac{f(z_2)}{f(z_1)} = \frac{(2)^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}}{(2)^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\pi} = -1 \; .$$

Bei B ist $z-1 \approx -2 = 2e^{\pm i\pi}$, aber $z+1 \approx \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$, wobei

$$\frac{f(z_4)}{f(z_3)} = \frac{\varepsilon^{1/2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,(2)^{1/2}\,e^{+i\frac{\pi}{2}}}{\varepsilon^{1/2}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}\,(2)^{1/2}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{2i\pi} = +1 \; .$$

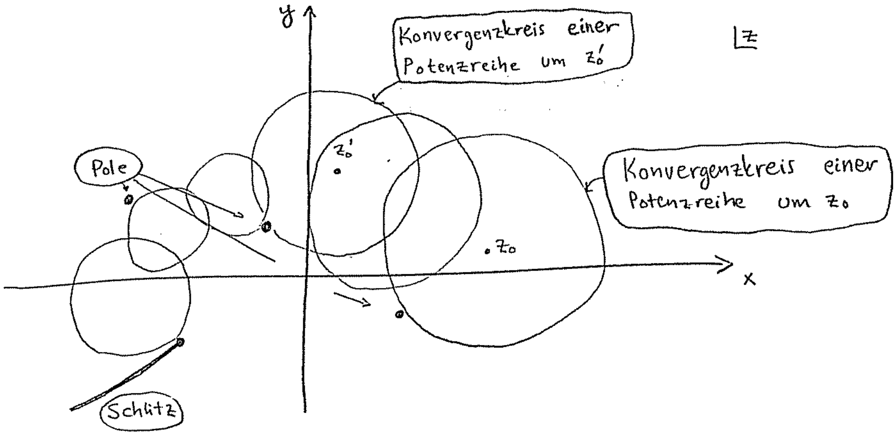
Die zwei Schlitze „kürzen sich" links vom B.

(Andere Konventionen sind im Prinzip auch möglich, z.B. kann der Schlitz durch $z=\infty$ laufen.)



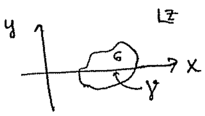
Analytische Fortsetzung:

Die Grundaussage lautet: wenn man eine analytische Funktion in einem kleinen Gebiet kennt, kennt man sie schon überall! (Wegen Singularitäten kann es aber nichttrivial sein, die Information anderswo zu transportieren.)

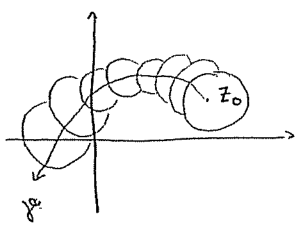


Genauer:

* „Identitätssatz": Sind $f(z)$ ung $g(z)$ beide analytisch auf dem Gebiet G und stimmen längs einer Kurve γ überein, dann sind sie bereits identisch auf ganz G.
  (Ohne Beweis; die Idee ist, dass dann $\Delta(z) := f(z) - g(z)$ die Eigenschaften $\Delta(z) = \Delta'(z) = \ldots = \Delta^{(n)}(z) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N},\ z \in \gamma$ hätte, und deshalb als Potenzreihe verschwinden würde.)



* Als Folge: reelle Funktionen, $f(x)$, haben nur eine Fortsetzung ins Komplexe.
  (Und zwar: $f(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n \Rightarrow f(z) = \sum_n a_n (z-x_0)^n$.)



* Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Kurve mit $z_0 = \gamma(t_0)$, und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine konvergente Potenzreihe um z_0. Unter einer analytischen Fortsetzung dieser Potenzreihe längs γ versteht man eine Familie von konvergenten Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\,(z-\gamma(t))^n$, die lokal verträglich ist.

* Letztendlich braucht die Fortsetzung aber nicht durch Potenzreihen konstruiert zu werden, sondern Rekursionsbeziehungen, Differenzialgleichungen, Integraldarstellungen, usw, stehen auch zur Verfügung — solange nur z und kein z^* auftaucht.

Beispiel: Gammafunktion (von Euler)

Γ 1707–1783

Sei vorerst $\Gamma(z) := \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}$.

Wann konvergiert dieses Integral?

Bei grossem t gibt es dank e^{-t} keine Probleme.

Bei kleinem t ist $e^{-t} \approx 1$ und wir haben

$$\int_0^\varepsilon dt \frac{1}{t^{1-z}} = \int_0^\varepsilon dt \frac{1}{t^{1-\mathrm{Re}z - i\,\mathrm{Im}z}} \overset{\text{Seite 35}}{=} \int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{1-\mathrm{Re}z}} \underbrace{e^{i\,\mathrm{Im}z \cdot \ln t}}_{|e^{i\,\mathrm{Im}z \ln t}| = 1} .$$

$\Rightarrow$ das Integral ist <u>absolut konvergent</u>, falls $1 - \mathrm{Re}z < 1$, d.h. $\boxed{\mathrm{Re}z > 0}$.

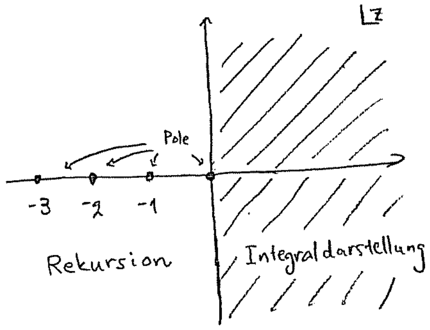
Rekursionsbeziehung:
$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt\, t^z e^{-t}$$
$$= \int_0^\infty dt \left[-\frac{d}{dt}\left(t^z e^{-t}\right) + z t^{z-1} e^{-t} \right]$$
$$= -\left[t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\Gamma(z) .$$

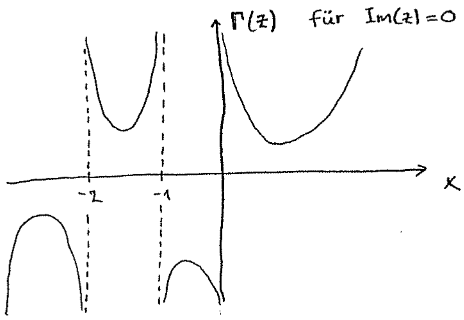
Substitution bei $t = \infty$ verschwindet unbedingt; Substitution bei $t = 0$ verschwindet bei $\boxed{\mathrm{Re}z > 0}$.

Wir haben also eine konsistente Beschreibung bei $\mathrm{Re}z > 0$. Aber die Rekursionsbeziehung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ kann auch bei $\mathrm{Re}z < 0$ benutzt werden, z.B.

$$\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(-\tfrac{1}{2}\right)} \Gamma\left(-\tfrac{1}{2}+1\right) = -2\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

So erhält man eine analytische Fortsetzung zur komplexen Ebene!





Übrigens: für $z \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \ldots = n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1) ;$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = +1$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$