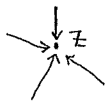
2. Komplexe Funktionen

2.1. Komplexe Differenzierbarkeit [Arfken 11.1-2]



Der Definitionsbereich komplexer Funktionen ist im Allgemeinen ein Teilgebiet einer Ebene. Differenzierbarkeit heisst, dass Ableitung unabhängig von der Richtung definiert werden kann. Dies macht komplexe Differenzierbarkeit zu einem wesentlich stärkeren Begriff als die reelle Differenzierbarkeit.

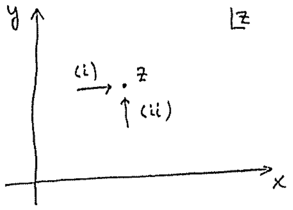
Definition: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion einer komplexen Variable. Ihre Ableitung bei z ist

$$f'(z) := \frac{df}{dz} := \lim_{|\delta z| \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z},$$

falls der Limes unabhängig vom $\arg(\delta z)$ ist ($\delta z = |\delta z| e^{i \arg(\delta z)}$).

Notwendige Bedingungen: Wir bezeichnen $z = x + iy$, $f(z) = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$.

Wähle (i) $\delta z = \delta x$; und (ii) $\delta z = i\,\delta y$.



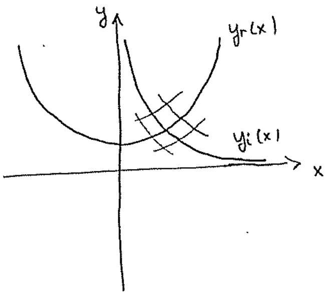
$$\text{(i)} \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x+\delta x, y) + iv(x+\delta x, y) - f}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{\delta y \to 0} \frac{u(x, y+\delta y) + iv(x, y+\delta y) - f}{i\,\delta y} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Diese sind gleich, falls die Cauchy (1789–1857) - Riemannschen (1826–1866) Differenzialgleichungen erfüllt sind:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Graphische Bedeutung: Sei $y = y_r(x)$ eine Lösung von $\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = \text{const.}$, und $y = y_i(x)$ eine Lösung von $\mathrm{Im} f(z) = v(x,y) = \text{const}'$. Wenn f komplex-differenzierbar ist, sind diese Kurven orthogonal zueinander!

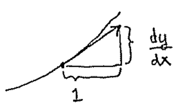


Denn: $u = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy_r}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy_r}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$;

$v = \text{const}'. \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy_i}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy_i}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$.

Und deshalb:

$$\left(1, \frac{dy_r}{dx}\right)\cdot\left(1, \frac{dy_i}{dx}\right) = 1 + \frac{\partial_x u}{\partial_y u}\cdot\frac{\partial_x v}{\partial_y v} = 1 + \frac{\partial_y v}{\partial_y u}\cdot\left(\frac{-\partial_y u}{\partial_y v}\right) = 1 - 1 \quad \square.$$



Cauchy-Riemann im Zähler

Hinreichende Bedingungen: Es zeigt sich, dass die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen auch hinreichend* sind, d.h. Richtungsunabhängigkeit garantieren. Denn:

$$
\begin{aligned}
\delta f &= f(z+\delta z) - f(z) \\
&= u(x+\delta x, y+\delta y) + i v(x+\delta x, y+\delta y) - u(x,y) - i v(x,y) \\
&= \delta x\,(\partial_x u + i\,\partial_x v) + \delta y\,(\partial_y u + i\,\partial_y v) + O(\delta^2) \\
&\overset{\text{Cauchy-Riemann}}{=} \delta x\,(\partial_x u + i\,\partial_x v) + \delta y\,(-\partial_x v + i\,\partial_x u) + O(\delta^2) \\
&= \partial_x u\,(\delta x + i\,\delta y) + i\,\partial_x v\,(\delta x + i\,\delta y) + O(\delta^2) \\
&= \underbrace{(\partial_x u + i\,\partial_x v)}_{\text{Änderung in x-Richtung}}\,\underbrace{\delta z}_{\text{Allgemeine Richtung}} + O(\delta^2).
\end{aligned}
$$

*Die Funktionen u, v müssen auch genügend regulär sein; ihre partiellen Ableitungen müssen in einer Umgebung von z stetig sein. Der Grund liegt in den Eigenschaften der hier nicht genau definierten Funktion „$O(\delta^2)$".

Bezeichnungen: Wenn eine Funktion in einem Gebiet $G \in \mathbb{C}$ (d.h. $\forall z \in G$) komplex-differenzierbar ist, wird sie analytisch bzw. holomorph bzw. regulär genannt. (Ein liebes Kind hat viele Namen!)

Beispiele:

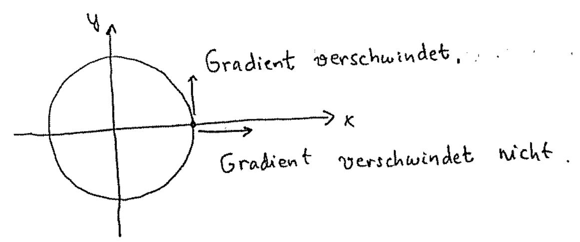
* $$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u} + i\,(\underbrace{2xy}_{v})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \partial_x u &= 2x = \partial_y v \\ \partial_y u &= -2y = -\partial_x v \end{aligned} \qquad \text{ok!}$$

* $$g(z, z^*) = z z^* = |z|^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{u}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \partial_x u &= 2x \neq \partial_y v \\ \partial_y u &= 2y \neq -\partial_x v \end{aligned} \qquad ↯$$

Diese Funktion ist also nicht analytisch.
Das Problem ist auch leicht zu verstehen:



Wie läuft es in der Praxis?

Weil Ableitungen richtungsunabhängig sind, hat man die Freiheit, in Richtung der reellen Achse abzuleiten; dann aber geht alles wie früher! Natürlich kann man dies auch aus der Definition verifizieren:

* Jede konstante Funktion auf G ist analytisch und hat die Ableitung Null.
  (Denn: $\dfrac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z} = \dfrac{c-c}{\delta z} = 0$.)

* Die Funktion $z \mapsto z$ ist analytisch und hat die Ableitung Eins.
  (Denn: $\dfrac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z} = \dfrac{z+\delta z-z}{\delta z} = 1$.)

* Summenregel: $(f+g)' = f'+g'$.
  (Denn: $(f+g)(z+\delta z) - (f+g)(z) = f(z+\delta z) - f(z) + g(z+\delta z) - g(z)$.)

* Produktregel: $(f*g)' = f' * g + f * g'$
  (Denn: $$(f*g)(z+\delta z) - (f*g)(z) = f(z+\delta z)g(z+\delta z) - f(z)g(z+\delta z) + f(z)g(z+\delta z) - f(z)g(z)$$
  $$= f'(z)\,\delta z\, g(z+\delta z) + f(z)g'(z)\,\delta z + O(\delta^2)$$
  $$= [f'(z)g(z) + f(z)g'(z)]\,\delta z + O(\delta^2).\ )$$

* Quotientenregel: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-g'f}{g^2}$ bei $g(z) \neq 0$.

* Kettenregel: $(f\circ g)'(z) = f'(g(z)) * g'(z)$.

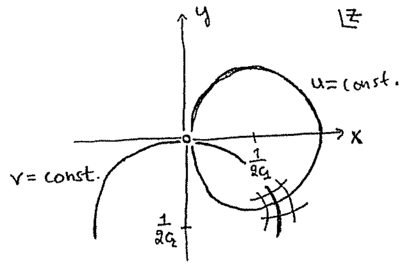
Es folgt:

* $$\frac{d}{dz} z^n \overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{dz}{dz} * z^{n-1} + z * \frac{dz^{n-1}}{dz}$$
  $$\overset{\text{erneut...}}{=} z^{n-1} + z\left(z^{n-2} + z\,\frac{dz^{n-2}}{dz}\right) = \ldots = n\,z^{n-1}.$$

* Jedes Polynom $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ist überall analytisch.

* Jede „rationale Funktion" $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \dfrac{a_n z^n + \ldots + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_0}$
  ist analytisch ausser an den Nennernullstellen.

Beispiel: $\frac{1}{z}$ ist analytisch auf der punktierten Ebene $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und die Ableitung ist $-\frac{1}{z^2}$.

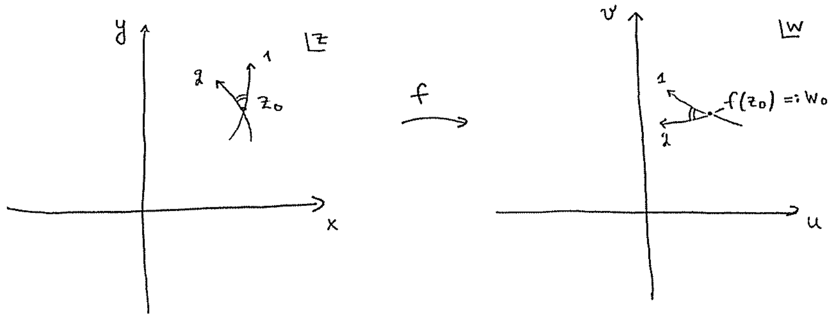


$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}\ ; \quad u = \text{const} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = c_1 \Leftrightarrow y^2 + \left(x - \frac{1}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{(2c_1)^2}$$

$$v = \text{const} \Leftrightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} = c_2 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2c_2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{(2c_2)^2}$$

Geometrische Bedeutung der Analytizität (Verallgemeinerung der Betrachtung auf Seite 29)

Eine komplex-analytische Funktion besitzt eine besondere geometrische Eigenschaft: wenn $f'(z) \neq 0$ ist $f(z)$ „winkeltreu" bzw. „lokal konform".



Es gilt nämlich: $\delta w := f(z_0+\delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\cdot \delta z + \mathcal{O}(\delta^2)$.

D.h. es geht um eine lineare Transformation; der „Vektor" δz wird durch $f'(z_0)$ multipliziert.

Eine allgemeine lineare Transformation ist nicht winkeltreu:

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \quad ; \quad \begin{cases} \vec{x}' = A\vec{x} \\ \vec{y}' = A\vec{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta' = \frac{\vec{x}'\cdot\vec{y}'}{\sqrt{\vec{x}'\cdot\vec{x}'}\sqrt{\vec{y}'\cdot\vec{y}'}}$$

$$= \frac{\vec{x}^T A^T A\, \vec{y}}{\sqrt{\vec{x}^T A^T A \vec{x}}\sqrt{\vec{y}^T A^T A \vec{y}}}$$

Aber Multiplikation durch eine komplexe Zahl ist Drehung mal Streckung ($z = \lambda\, e^{i\theta}$). D.h. die entsprechende Matrix ist eine orthogonale Matrix mal Streckung, und deshalb gilt

$$\cos\theta' = \frac{\vec{x}^T \lambda^2 \overbrace{\mathcal{O}^T\mathcal{O}}^{\mathbb{1}}\, \vec{y}}{\sqrt{\vec{x}^T\lambda^2 \underbrace{\mathcal{O}^T\mathcal{O}}_{\mathbb{1}}\vec{x}}\sqrt{\vec{y}^T\lambda^2\underbrace{\mathcal{O}^T\mathcal{O}}_{\mathbb{1}}\vec{y}}} = \frac{\vec{x}^T\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \cos\theta .$$

Konsequenz: Wenn $f'(z_0) \neq 0$, gibt es eine Umgebung von $w_0 := f(z_0)$ in der die Inverse f^{-1} existiert und wieder analytisch ist, und zwar mit

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \qquad \left(\Leftrightarrow \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}\right).$$

(Denn: $f'(z_0) \neq 0 \;\rightarrow$ Matrix ist $A = \lambda\cdot\mathcal{O}$ (Streckung; orthogonal)

$\Rightarrow$ Inverse existiert und lautet $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{O}^T$. (Drehung in die entgegengesetzte Richtung)

Oder direkt: $\delta w = f'(z_0)\cdot\delta z + \mathcal{O}(\delta^2)$

$\Rightarrow \delta z = \dfrac{1}{f'(z_0)}\cdot\delta w + \mathcal{O}(\delta^2)$.)

— o — o —