1793 - 1841

1.7 Greensche Funktionen [Arfken 10.1]

Auf Seiten 15, 19 wurde die Eigenwertgleichung $\mathcal{L} u_n(x) + \lambda_n w(x) u_n(x) = 0$ betrachtet. Mit Hilfe von diesen Lösungen konnte eine orthonormierte Basis konstruiert werden (Kapitel 1.6); seien $\{v_n(x)\}$ diese Basisfunktionen.

Oft ist das Problem aber der Form $\mathcal{L} f(x) + g(x) = 0$, wobei $g(x)$ eine gegebene Funktion ist (genannt „inhomogener Term" oder „Kraft" oder „Quelle").

Wie hilft uns die Basis $\{v_n(x)\}$ zur Bestimmung von $f(x)$?

Allgemeine Methode:

(i) Wenn bei gegebenen Randbedingungen der Eigenwert $\lambda_0 := 0$ existiert, kann $f(x)$ nicht eindeutig sein:

$$\mathcal{L}(f + c v_0) + g = \mathcal{L} f + c \underbrace{\mathcal{L} v_0}_{0} + g = 0 \quad \forall c \in \mathbb{C}.$$

Seien Randbedingungen so gewählt worden, dass die Lösung eindeutig ist; dann sind alle $\lambda_n \neq 0$.

(ii) Sei $G(x;y)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathcal{L} G(x;y) + \delta(x-y) = 0,$$

mit denselben Randbedingungen als $f(x)$ $\forall y$.
Eine solche Lösung wird eine Greensche Funktion genannt.

(iii) Die gesuchte Lösung lautet

$$f(x) = \int_a^b dy\, G(x;y)\, g(y).$$

Denn:
$$\mathcal{L} f(x) + g(x) = \int_a^b dy\, \mathcal{L} G(x;y)\, g(y) + g(x)$$
$$= -\int_a^b dy\, \delta(x-y)\, g(y) + g(x) = 0.$$

Randbedingungen sind auch erfüllt (vgl. Seite 16):

$$\cos(\alpha) f(a) + \sin(\alpha) p(a) f'(a)$$
$$= \int_a^b dy \underbrace{\left[\cos\alpha\, G(a;y) + \sin(\alpha) p(a) G'(a;y)\right]}_{0 \;\forall y} g(y) = 0.$$

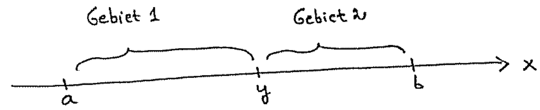
(iv) $G(x;y)$ kann formal aus $\{v_n\}$ konstruiert werden:

$$G(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^*(y)}{\lambda_n}$$

Denn:
$$\mathcal{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^*(y)}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L} v_n(x)\, v_n^*(y)}{\lambda_n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cancel{\lambda_n} w(x) v_n(x) v_n^*(y)}{\cancel{\lambda_n}}$$
$$= -w(x) \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) v_n^*(y)$$
$$\stackrel{\text{vgl. Seite 23}}{=} -\frac{w(x)}{w(y)}\, \delta(x-y) \stackrel{\text{Seite 4 / (iv)}}{=} -\delta(x-y).$$

Praktische Methode: In der Praxis ist es oft schwierig, alle Eigenwerte und Eigenfunktionen zu bestimmen, und dann die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^*(y)}{\lambda_n}$ durchzuführen. Die Greensche Funktion kann aber trotzdem als Lösung von $\mathcal{L}\, G(x;y) + \delta(x-y) = 0$ konstruiert werden.

(i) Betrachte $x<y$ und $x>y$:



Im Gebiet 1: $G_1(x;y) := G(x;y) \quad , \; x<y$

$\Rightarrow \mathcal{L}\, G_1(x;y) = 0$.

D.h. G_1 ist Lösung mit $\lambda_0 = 0$, aber erfüllt Randbedingung <u>nur</u> bei $x=a$.

Im Gebiet 2: $G_2(x;y) := G(x;y) \quad , \; x>y$

$\Rightarrow \mathcal{L}\, G_2(x;y) = 0$; Randbedingung <u>nur</u> bei $x=b$.

(ii) Weil jeweils nur <u>eine</u> Randbedingung erfüllt ist, gibt es noch zwei freie Parameter, einen in G_1 und einen anderen in G_2.

(iii) Fixiere die freien Parameter durch

$$\lim_{x\to y^-} G_1(x;y) = \lim_{x \to y^+} G_2(x;y)$$

$$\lim_{x\to y^-} G_1'(x;y) = \lim_{x\to y^+} G_2'(x;y) + \frac{1}{p(y)} .$$

$$\frac{d}{dx}\left\{ p(x) \frac{dG(x;y)}{dx} \right\} + q(x) G(x;y) = -\delta(x-y)$$

Integriere auf beiden Seiten $\int_{y^-}^{y^+} dx$!

$$\Rightarrow p(y)\left[G'(y^+;y) - G'(y^-;y) \right] = -1$$

(iv) Folglich gilt $f(x) := \int_a^b dy\, G(x;y)\, g(y)$

$$= \int_a^x dy\, G_2(x;y) g(y) + \int_x^b dy\, G_1(x;y)\, g(y) .$$

Randbedingungen sind erfüllt: bei $x=a$ gibt es einen Beitrag nur aus G_1 (weil $\int_a^a dy\, G_2(a;y)\, g(y) = 0$), bei $x=b$ nur aus G_2, und diese sind definitionsgemäss richtig.

— o —

Beispiel: Wie auf Seiten 16, 20: $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$, $a=0$, $b=2\pi$, $w=1$;

Dirichlet-Randbedingungen $u(0)=u(2\pi)=0$.

Seite 20: $u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$, $n=1,2,\dots$

$$\Rightarrow v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{nx}{2}\right), \quad n=1,2,\dots$$

Gefragt wird die Lösung von

$$\frac{d^2f}{dx^2} + g(x) = 0, \qquad f(0)=f(2\pi)=0,$$

mit einer beliebigen Funktion $g(x)$.

„Praktische Methode"

Gebiet 1: $\frac{d^2G_1}{dx^2} = 0 \Rightarrow G_1 = a+bx$.

Randbedingung $G_1(0;y)=0 \Rightarrow a=0$

$\Rightarrow G_1(x;y) = bx$

Gebiet 2: $\frac{d^2G_2}{dx^2} = 0 \Rightarrow G_2 = c+dx$.

Randbedingung $G_2(2\pi;y)=0 \Rightarrow c=-2\pi d$

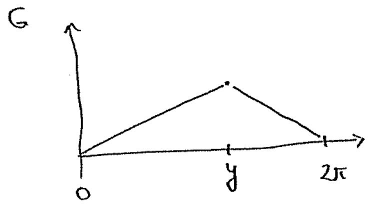
$\Rightarrow G_2(x;y) = d(x-2\pi)$.

Anschlussbedingungen: $G_1(y;y) = G_2(y;y) \Leftrightarrow b\cdot y = d\cdot(y-2\pi)$

$G_1'(y;y) = G_2'(y;y)+1 \Leftrightarrow b = d+1$

$\Rightarrow (\cancel{d}+1)y = \cancel{d}y - d\cdot 2\pi$ $\qquad d = -\frac{y}{2\pi}$

$b = 1-\frac{y}{2\pi}$



Greensche Funktion: $$G(x;y) = \begin{cases} x\left(1-\frac{y}{2\pi}\right), & 0<x<y<2\pi \\ y\left(1-\frac{x}{2\pi}\right), & 0<y<x<2\pi \end{cases}$$

Bemerkung: $G(x;y)=G(y;x)$ – ist dies ein Zufall?
Nein! Wenn $\{v_n\}$ als <u>reell</u> gewählt werden können, wie es bei selbstadjungierten Operatoren der Fall ist, garantiert dies der allgemeine Ausdruck aus Seite 25:

$$G(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)\, v_n^*(y)}{\lambda_n}.$$

Lösung: $$\boxed{f(x) = \left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\int_0^x dy\, y\, g(y) + x\int_x^{2\pi} dy \left(1-\frac{y}{2\pi}\right) g(y).}$$

„Allgemeine Methode"

Wir kennen jetzt $v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$ und $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$.

Laut Seiten 25, 27 sollte gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right)}{\pi n^2} = \begin{cases} x\left(1-\frac{y}{2\pi}\right), & 0<x<y<2\pi \\ y\left(1-\frac{x}{2\pi}\right), & 0<y<x<2\pi. \end{cases}$$

Laut Seite 23 sollte auch gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right)}{\pi} = \delta(x-y).$$

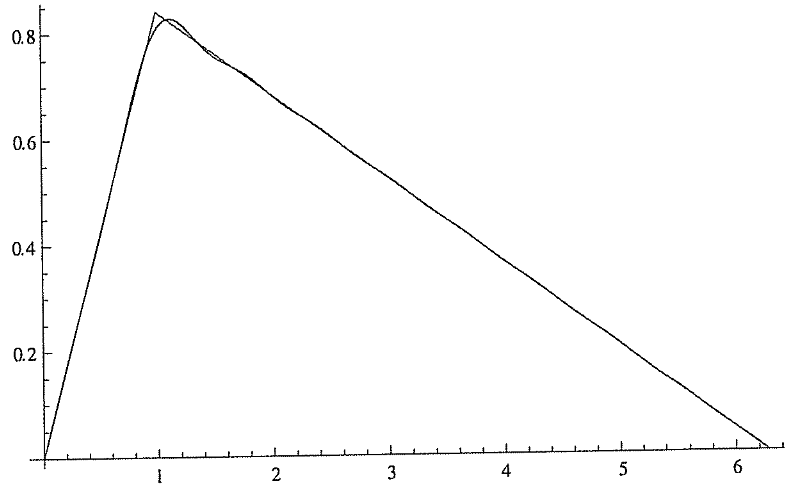
Kann es sein ??

```
In[1]:= y = 1; nmax = 20;

In[2]:= allgemein[x_] := Sum[4 Sin[n x / 2] Sin[n y / 2] / (Pi n^2), {n, 1, nmax}];
        praktisch[x_] := If[x < y, x (1 - y / (2 Pi)), y (1 - x / (2 Pi))];

In[4]:= Plot[{allgemein[x], praktisch[x]}, {x, 0, 2 Pi}]
```

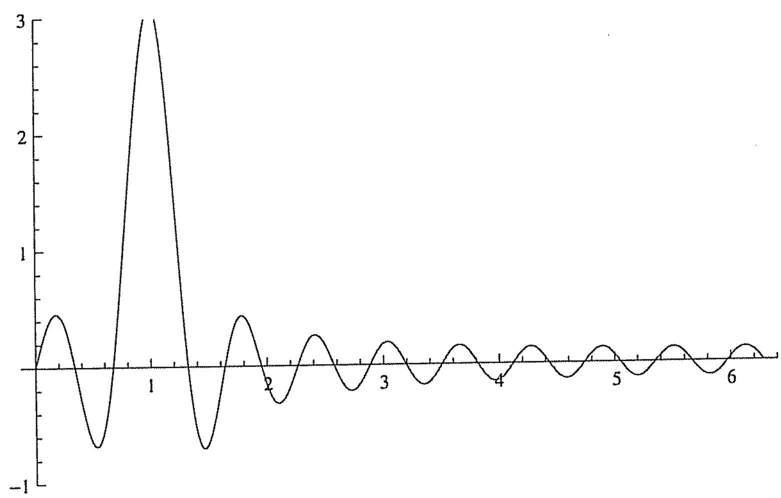
Out[4]=




```
In[5]:= vollstaendig[x_] := Sum[Sin[n x / 2] Sin[n y / 2] / (Pi), {n, 1, nmax}];

In[6]:= Plot[vollstaendig[x], {x, 0, 2 Pi}, PlotRange → {-1, 3}]
```

Out[6]=




```
In[7]:= NIntegrate[vollstaendig[x], {x, 0, 2 Pi}]

Out[7]= 1.05787
```