1.5 Hermitesche Differenzialoperatoren [Arfken 8.2]

1822–1901

Wie beim Übergang von symmetrischen zu hermiteschen Matrizen, lohnt es sich auch bei Differenzialoperatoren, komplexe Funktionenräume zu betrachten.

Sei, wie auf Seite 14, $\mathcal{L} f(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{df}{dx}\right] + q(x) f(x)$.

Ein hermitesches Skalarprodukt wird eingeführt (vgl. Seite 15):

$$\langle g | f \rangle := \int_a^b dx\, w(x)\, g^*(x) f(x) \quad ; \quad w(x) > 0 \quad \text{ausser einzelner Punkte.}$$

$$\langle g | \mathcal{L} f \rangle := \int_a^b dx\, w(x)\, g^*(x) \frac{1}{w(x)} \mathcal{L} f(x) = \int_a^b dx\, g^*(x) \mathcal{L} f(x).$$

Vgl. bei Matrizen:
$\langle \vec{u}, M(\vec{v}) \rangle = \langle M(\vec{u}), \vec{v} \rangle$
$\Rightarrow M_{ji} = \langle \vec{e}_j, M(\vec{e}_i) \rangle$
$\overset{\text{Skalarprodukt}}{=} \langle M(\vec{e}_i), \vec{e}_j \rangle^*$
$\overset{\text{hermitesch}}{=} \langle \vec{e}_i, M(\vec{e}_j) \rangle^*$
$= M_{ij}^*$

Ein Operator sei hermitesch wenn $\langle g | \mathcal{L} f \rangle \overset{!}{=} \langle \mathcal{L} g | f \rangle = \langle f | \mathcal{L} g \rangle^*$.
Dies führt zu nichttrivialen Randbedingungen (vgl. Seite 16):

$$\begin{aligned}
\langle g | \mathcal{L} f \rangle &= \int_a^b dx \left\{ g^*(x) \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{df}{dx}\right] + g^*(x) q(x) f(x) \right\} \\
&= \left[g^*(x) p(x) \frac{df(x)}{dx} \right]_a^b + \int_a^b dx \left\{ -\frac{dg^*(x)}{dx} p(x) \frac{df(x)}{dx} + g^*(x) q(x) f(x) \right\} \\
&= \left[g^* p \frac{df}{dx} - f p \frac{dg^*}{dx} \right]_a^b + \int_a^b dx \left\{ f \frac{d}{dx}\left[p \frac{dg^*}{dx} \right] + f q g^* \right\}.
\end{aligned}$$

$$\langle f | \mathcal{L} g \rangle^* = \int_a^b dx \left\{ f \frac{d}{dx}\left[p^* \frac{dg^*}{dx} \right] + f q^* g^* \right\}.$$

D.h. ein selbstadjungierter Differenzialoperator $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$, ist hermitesch, wenn eine Klasse $\mathcal{K}$ von Funktionen betrachtet wird, in der $\left[g^* p \frac{df}{dx} - f p \frac{dg^*}{dx} \right]_a^b = 0 \quad \forall\, f, g \in \mathcal{K}$ gilt.

Bemerkung: Im Gegensatz zur Seite 14 kann auch ein Diff.operator erster Ordnung hermitesch sein:

$$\begin{aligned}
\langle g | \mathcal{L} f \rangle = \int_a^b dx\, g^* \left(p_1 \frac{df}{dx} + p_2 f \right) &= \left[g^* p_1 f \right]_a^b + \int_a^b dx \left(-f \frac{d}{dx}(g^* p_1) + f p_2 g^* \right) \\
&= \left[g^* p_1 f \right]_a^b + \int_a^b dx\, f \left\{ -p_1 \frac{dg^*}{dx} + (-p_1' + p_2) g^* \right\}
\end{aligned}$$

$$\langle f | \mathcal{L} g \rangle^* = \int_a^b dx\, f \left(p_1^* \frac{dg^*}{dx} + p_2^* g^* \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} p_1^* &= -p_1 \\ p_2^* &= -p_1' + p_2 \end{aligned} \right.$$

Lösungen existieren, z.B. $p_1(x) = -i\hbar$, $p_2(x) \in \mathbb{R}$.

Hermitesch konjugierte Differenzialoperatoren

Ein zu $\mathcal{L}$ „adjungierter" bzw. „hermitesch konjugierter" Differenzialoperator sei definiert durch seine „Matrixelemente" als

im anderen Sinne als im Kap. 14 – schlechte Bezeichnungen!

$$\langle g | \mathcal{L}^+ f \rangle := \langle \mathcal{L} g | f \rangle = \langle f | \mathcal{L} g \rangle^* .$$

Ein hermitescher Differenzialoperator ist dann auch „selbst-adjungiert", $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$.

Es folgt:

* Sei $\mathcal{A}$ ein beliebiger linearer Differenzialoperator. Wenn er als $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{A}^+) - \frac{i}{2}(i\mathcal{A} - i\mathcal{A}^+)$ ausgedrückt wird, sind $\mathcal{A}+\mathcal{A}^+$ sowie $i\mathcal{A} - i\mathcal{A}^+$ hermitesch.

  (Denn: $\langle g | (\mathcal{A}+\mathcal{A}^+) f \rangle = \langle g | \mathcal{A} f \rangle + \langle \mathcal{A} g | f \rangle$ und

  $$\begin{aligned} \langle (\mathcal{A}+\mathcal{A}^+) g | f \rangle &= \langle f | (\mathcal{A}+\mathcal{A}^+) g \rangle^* \\ &= \{ \langle f | \mathcal{A} g \rangle + \langle \mathcal{A} f | g \rangle \}^* \\ &= \langle \mathcal{A} g | f \rangle + \langle g | \mathcal{A} f \rangle \end{aligned}$$

  Ähnlich bei $i(\mathcal{A} - \mathcal{A}^+)$, siehe links.)

  $$\begin{aligned} &\langle g | (i\mathcal{A} - i\mathcal{A}^+) | f \rangle \\ &= i \langle g | \mathcal{A} f \rangle - i \langle \mathcal{A} g | f \rangle \\ &= i \langle \mathcal{A}^+ g | f \rangle - i \langle \mathcal{A} g | f \rangle \\ &= \langle (-i\mathcal{A}^+ + i\mathcal{A}) g | f \rangle \end{aligned}$$

* Es gilt $(\mathcal{A}\mathcal{B})^+ = \mathcal{B}^+ \mathcal{A}^+$.

  (Denn: $$\begin{aligned} \langle g | (\mathcal{A}\mathcal{B})^+ f \rangle &= \langle \mathcal{A}\mathcal{B} g | f \rangle = \langle \mathcal{A}(\mathcal{B} g) | f \rangle \\ &= \langle \mathcal{B} g | \mathcal{A}^+ f \rangle = \langle g | \mathcal{B}^+ (\mathcal{A}^+ f) \rangle \end{aligned}$$)

* Es gilt $(\mathcal{A}^+)^+ = \mathcal{A}$.

  (Denn: $$\begin{aligned} \langle g | (\mathcal{A}^+)^+ | f \rangle &= \langle \mathcal{A}^+ g | f \rangle = \langle f | \mathcal{A}^+ g \rangle^* \\ &= \langle \mathcal{A} f | g \rangle^* = \langle g | \mathcal{A} f \rangle . \end{aligned}$$)

* Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hermitesche Operatoren sind, dann ist $\mathcal{C} := i(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})$ unbedingt hermitesch.

  (Denn: $$\begin{aligned} \langle i(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}) g | f \rangle &= -i \langle (\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}) g | f \rangle \\ &= -i \langle (\mathcal{A}^+\mathcal{B}^+ - \mathcal{B}^+\mathcal{A}^+) g | f \rangle = -i \langle [(\mathcal{B}\mathcal{A})^+ - (\mathcal{A}\mathcal{B})^+] g | f \rangle \\ &= -i \langle g | (\mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{B}) f \rangle = \langle g | i(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}) f \rangle . \end{aligned}$$)

Bemerkung: In der Praxis bedeutet die Definition

$$\langle g | \mathcal{L}^+ f \rangle = \langle f | \mathcal{L} g \rangle^*$$

dass $$\int_a^b dx\, g^*(x)\, \mathcal{L}^+ f(x) = \int_a^b dx\, f(x)\, \mathcal{L}^* g^*(x) ,$$

d.h. $\mathcal{L}^+ =$ „$\mathcal{L}^*$ zusammen mit $\left(\frac{d}{dx}\right)^n \to \left(-\frac{d}{dx}\right)^n$".

aus partiellen Integrationen

Eigenwerte hermitescher Differenzialoperatoren

Eigenwerte seien definiert wie auf Seite 15 :

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x) u(x) = 0 \quad , \quad u(x) \neq 0 \; ; \quad w(x) > 0 \; .$$

Behauptung: Die Eigenwerte sind unbedingt reell.

Beweis:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + \lambda w u = 0 & \leftarrow \boxed{\text{multipliziere durch } u^*} \\ \mathcal{L}^* u^* + \lambda^* w u^* = 0 & \leftarrow \boxed{\text{multipliziere durch } u} \end{cases}$$

subtrahiere und integriere

$$\Rightarrow \int_a^b dx \left(u^* \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^* u^* + \lambda u^* w u - \lambda^* u w u^* \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle u | \mathcal{L} u \rangle - \underbrace{\langle u | \mathcal{L} u \rangle^*}_{\langle \mathcal{L} u | u \rangle \underset{\mathcal{L}=\mathcal{L}^+}{=} \langle u | \mathcal{L} u \rangle} + (\lambda - \lambda^*) \langle u | u \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda^*) \underbrace{\int_a^b dx\, w(x) |u(x)|^2}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda^* \quad \square \; .$$

Eigenfunktionen hermitescher Differenzialoperatoren

Behauptung: Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten sind unbedingt orthogonal zueinander.

Beweis:

$$\mathcal{L}u + \lambda w u = 0 \quad \longleftarrow \text{ multipliziere durch } v^*$$
$$\mathcal{L}^* v^* + \mu^* w v^* = 0 \quad \longleftarrow \text{ multipliziere durch } u$$

subtrahiere und integriere

$$\Rightarrow \int_a^b dx \left(v^* \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^* v^* + \lambda v^* w u - \mu^* u w v^* \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle v | \mathcal{L} u \rangle - \underbrace{\langle u | \mathcal{L} v \rangle^*}_{\langle \mathcal{L} v | u \rangle \underset{\mathcal{L}=\mathcal{L}^+}{=} \langle v | \mathcal{L} u \rangle} + (\lambda - \mu^*) \langle v | u \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu^*)}_{= \lambda - \mu \neq 0} \langle v | u \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle v | u \rangle = 0 \quad \square \; .$$

Bemerkungen:

(i) Wenn es mehrere linear unabhängige Eigenfunktionen zum selben Eigenwert gibt, ist es nicht automatisch garantiert, dass diese orthogonal zueinander sind. Sie können aber als orthogonal gewählt werden; mehr dazu im Kapitel 1.6.

(ii) Es besteht wieder die Frage der Vollständigkeit, d.h. ob Eigenfunktionen eines hermiteschen Differenzialoperators als Basis dienen können. Auch diese Sache wird im Kapitel 1.6 diskutiert.

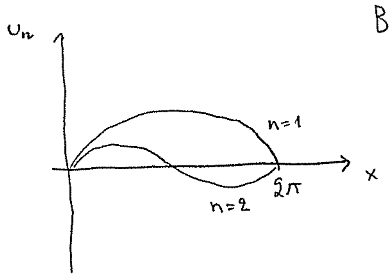
Beispiel

Gehe weiter mit Seite 16: $\mathcal{L} := \frac{d^2}{dx^2}$, $a := 0$, $b := 2\pi$, $w := 1$.

Betrachte den Fall mit Dirichlet-Randbedingungen: $u(0) = u(2\pi) = 0$.

$$\Rightarrow \quad u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Seite 16



Orthogonalität: $\int_0^{2\pi} dx \, \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{mx}{2}\right)$

$$= \int_0^{2\pi} dx \, \frac{1}{(2i)^2} \left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}\right)\left(e^{\frac{imx}{2}} - e^{-\frac{imx}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dx \left(e^{\frac{i(n+m)x}{2}} - e^{\frac{i(m-n)x}{2}} - e^{\frac{i(n-m)x}{2}} + e^{-\frac{i(n+m)x}{2}}\right)$$

$$\overset{n \neq m}{=} -\frac{1}{4} \left[\frac{2e^{\frac{i(n+m)x}{2}}}{i(n+m)} - \frac{2e^{\frac{i(m-n)x}{2}}}{i(m-n)} - \frac{2e^{\frac{i(n-m)x}{2}}}{i(n-m)} - \frac{2e^{-\frac{i(n+m)x}{2}}}{i(n+m)} \right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2i} \left[\frac{(-1)^{n+m} - 1}{n+m} - \frac{(-1)^{m-n} - 1}{m-n} - \frac{(-1)^{n-m} - 1}{n-m} - \frac{(-1)^{n+m} - 1}{n+m} \right]$$

$$= 0 \; !$$ (wie auf Seite 19 vorhergesagt)

Oder: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

$\Rightarrow \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \cos\left(\frac{(m-n)x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)x}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \left[\frac{\sin\left(\frac{(m-n)x}{2}\right)}{m-n} - \frac{\sin\left(\frac{(m+n)x}{2}\right)}{m+n} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

Normierung: $\int_0^{2\pi} dx \, \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \left(1 - \cos(nx)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{2\pi} = \pi .$$

— o — o —