

1.3 Lineare Integraltransformationen [Aufgaben 20.1-4]

Nachmal die Logik der Fourier-Reihe (Kapitel 1.2):

$f(x) \leftrightarrow$ Funktion bzw. "Vektor" in der "Standardbasis", mit x als "Index"; $|f\rangle_x$.

$e^{\frac{i2\pi nx}{L}} \leftrightarrow$ Basisvektoren einer anderen orthogonalen Basis (nicht unbedingt normiert), d.h. $|\hat{v}_n\rangle_x$.

$f_F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i2\pi nx}{L}} \leftrightarrow |f_F\rangle_x = \sum_n \langle \hat{v}_n | f \rangle |\hat{v}_n\rangle_x$
↑ "Komponenten" von f in Fourier-Basis

Es gibt aber auch noch weitere mögliche orthogonale Basen, abhängig davon welche "Klasse" von Funktionen betrachtet wird.

Wir werden später eine allgemeine Methode zur Erzeugung von Basen diskutieren (als Eigenfunktionen von Differenzialoperatoren), aber hier Beispiele:

* Fourier-Transformation ($f(x)$ nicht periodisch; $-\infty < x < \infty$):

$c_n \rightarrow \tilde{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$; $k \in \mathbb{R}$

entspricht $\langle \hat{v}_n | f \rangle$; jetzt " $\langle k | f \rangle$ " (Seite 12)

* Laplace-Transformation ($f(x)$, $x \geq 0$, darf wachsen bei $x \rightarrow \infty$):

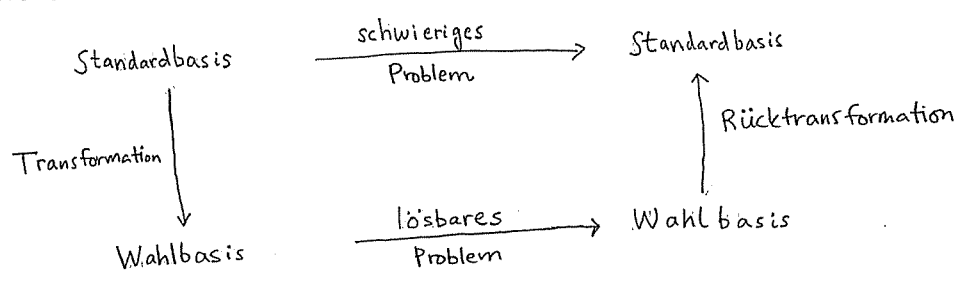
$\tilde{f}(k) := \int_0^{\infty} dx f(x) e^{-kx}$

* Mellin-Transformation:

$\tilde{f}(k) := \int_0^{\infty} dx f(x) x^{k-1}$

Alle sind lineare Transformationen: $\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow \alpha \tilde{f}(k) + \beta \tilde{g}(k)$.

Die Idee ist immer dieselbe:



Dabei liegt das Problem nicht selten bei der Konstruktion der Rücktransformation. Mathematisch gesehen vermutet die ganze Prozedur auch die Vollständigkeit der Wahlbasis, sonst existiert keine Rücktransformation.

Genaueres zur Fourier-Transformation

Lebesgue 1875-1941

Funktionsraum:

Der Funktionsraum $L_p(\mathbb{R}^n)$ bestehe aus reell- oder komplexwertigen Funktionen des \mathbb{R}^n , die eine endliche " L_p -Norm" besitzen:

$$\|f\|_{L_p} := \left\{ \int d^n \vec{x} |f(\vec{x})|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Existenz der Transformation:

Wenn $f(\vec{x}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, ist auch $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

In diesem Fall existiert die Fourier-Transformierte,

$$\tilde{f}(\vec{k}) := \int d^n \vec{x} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\text{denn } |\tilde{f}(\vec{k})| \leq \int d^n \vec{x} |f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}| = \|f\|_{L_1} < \infty$$

Existenz der Rücktransformation:

Falls auch $\tilde{f}(\vec{k}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, lässt sich

die Fourier-Transformation umkehren, und es gilt

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^n \vec{k}}{(2\pi)^n} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Diese Aussage wird hier nicht ordentlich gezeigt,* aber einen "Physikerbeweis" sollte man kennen:

Sei der Einfachheit halber $n=1$. Es gilt (vgl. Seite 6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} \stackrel{!}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} dk e^{k[i(x-y)-\epsilon]} + \int_0^{\infty} dk e^{k[i(y-x)-\epsilon]} \right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{e^{k[i(x-y)-\epsilon]}}{i(x-y)-\epsilon} + \frac{e^{k[i(y-x)-\epsilon]}}{i(y-x)-\epsilon} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon - i(x-y)} + \frac{1}{\epsilon + i(x-y)} \right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\pi [\epsilon^2 + (x-y)^2]} = \delta(x-y)$$

Seite 3

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) f(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} f(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} \right\} !$$

Transformation $\Rightarrow \tilde{f}(k)$

Rücktransformation $\Rightarrow f(x)$.

* Eine ähnliche Strategie wie auf Seiten 7-8 kann benutzt werden; mehr dazu im Kapitel 1.6.

Beispiel:

Die Diffusionsgleichung $\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ soll mit der Anfangsbedingung $\phi(0, x) := \delta(x)$ gelöst werden.

(i) Fourier-transformiere Gleichung und Anfangsbedingung:

$$* \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \partial_t \phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} D \partial_x^2 \phi(t, x)$$

$\phi(t, x)$ wird behandelt wie eine "Testfunktion" (vgl. Seite 3), im Sinne dass partielle Integrationen immer erlaubt sind.

$$\Rightarrow \partial_t \tilde{\phi}(t, k) = -D k^2 \tilde{\phi}(t, k)$$

$$* \begin{aligned} \phi(0, x) &= \delta(x) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}(0, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \delta(x) = 1 \end{aligned}$$

(ii) Löse Problem in der Fourier-Basis:

$$\tilde{\phi}(t, k) = \tilde{\phi}(0, k) e^{-t D k^2} = e^{-t D k^2}$$

(iii) Rücktransformiere in die Standardbasis:

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(t, k) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-t D (k^2 - \frac{ikx}{tD})} \end{aligned}$$

Schreibe $k^2 - \frac{ikx}{tD} = (k - \frac{ix}{2tD})^2 + \frac{x^2}{4t^2 D^2}$

$$\Rightarrow \phi(t, x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4tD}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-tD (k - \frac{ix}{2tD})^2}$$

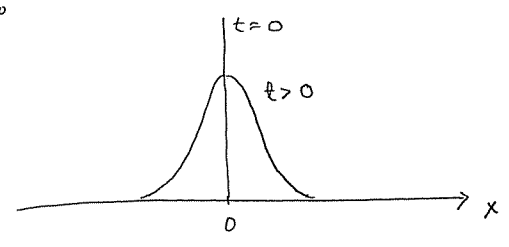
Substituiere $k = k' + \frac{ix}{2tD}$ (mehr dazu im Kapitel 3!)

und benutze $\int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-tD (k')^2} = \sqrt{\frac{\pi}{tD}}$

$$\Rightarrow \phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi tD}} e^{-\frac{x^2}{4tD}}$$

Bemerkung: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(t, x) \stackrel{!}{=} \tilde{\phi}(t, 0) = 1$ ist zeitunabhängig!

Skizze:



Allgemeine Struktur der Basistransformationen

Bei einem Vektor in der Standardbasis: $u_i = (\vec{u})_i = \vec{e}_i \cdot \vec{u}$.
 Analog bei einer Funktion in der „Standardbasis“: $|f\rangle_x = \langle x|f\rangle$.

Basisfunktionen einer anderen Basis werden durch eine andere „Koordinate“ numeriert, z.B. n (Seite 5) oder im Allgemeinen k (Seite 9).

* Begründung:

$$\langle f|g\rangle = \int dx \langle f|x\rangle \langle x|g\rangle$$

$$= \int dx f'(x)g(x)$$

Bei der Standardbasis: $\langle x|y\rangle := \delta(x-y)$ „Orthonormierung“
 $\int dx |x\rangle \langle x| := id = \mathbb{1}$ „Vollständigkeit“*

Diese passen überein:
 $f(y) = \langle y|f\rangle = \int dx \langle y|x\rangle \langle x|f\rangle = \int dx \delta(x-y) f(x)$ ok!

Bei einer anderen Basis:
 $\langle k|q\rangle = \delta(k-q)$ (evtl. Normierung)
 $\int dk |k\rangle \langle k| = id = \mathbb{1}$

Die Normierungen müssen wieder übereinpassen:
 $\check{f}(q) := \langle q|f\rangle = \int dk \langle q|k\rangle \langle k|f\rangle = \int dk \delta(q-k) \check{f}(k)$,
 d.h. $\int dk \delta(q-k) = 1$.

In einem Basiswechsel wird eine „Übergangsamplitude“, $\langle x|k\rangle$,
 gebraucht, und ihre Normierung muss so fixiert werden, dass
 $\delta(x-y) = \langle x|y\rangle = \int dk \langle x|k\rangle \langle k|y\rangle = \int dk \langle x|k\rangle \langle y|k\rangle^*$
 gilt. Zum Beispiel: $dk := \frac{dk}{2\pi} \Rightarrow \langle x|k\rangle = e^{ikx}$, vgl. Seite 10.

Mit dieser Notation funktioniert alles „automatisch“:

Transformation: $\langle k|f\rangle = \int dx \langle k|x\rangle \langle x|f\rangle$
 $\mathbb{1} = \int dx |x\rangle \langle x|$
 $= \int dx \langle x|f\rangle \langle x|k\rangle^*$

Rücktransformation: $\langle x|f\rangle = \int dk \langle x|k\rangle \langle k|f\rangle$
 $\mathbb{1} = \int dk |k\rangle \langle k|$
 $= \int dk \langle k|f\rangle \langle x|k\rangle$

Die genaue Form von dk und $\langle x|k\rangle$ hängt von der Wahl der Basis ab.