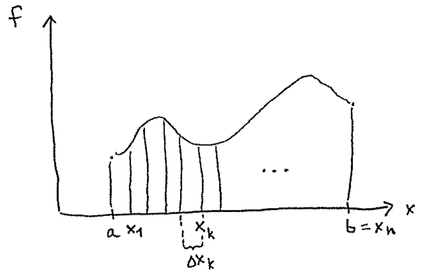
1. Funktionenräume

1.1 Grundbegriffe [Arfken 1.11]

Wenn wir Funktionen auf einem endlichen Intervall betrachten, und den Raum „diskretisieren" (wie bei der Definition des bestimmten Integrals), können Funktionen als Spaltenvektoren visualisiert werden:



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f(x_k) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix}.$$

Normalerweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

Falls $f(x) \in \mathbb{K}$, bilden solche Funktionen eine „abelsche Gruppe", mit Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x).$$

Dazu kann eine Skalarmultiplikation auch definiert werden, als

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die Menge solcher Funktionen bildet einen „$\mathbb{K}$-Vektorraum" $(=: V)$.

Unter Umständen kann sogar ein „hermitesches Skalarprodukt" (siehe unten) definiert werden. In der Tat schlägt das Standard-Skalarprodukt Folgendes vor:

$$\lim_{\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f^*(x_i) g(x_i) \xrightarrow{\text{falls Limes existiert}} \int_a^b dx \, f^*(x) g(x) =: \langle f, g \rangle .$$

Wenn alle solchen Integrale existieren, insbesondere auch

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b dx \, |f(x)|^2 < \infty ,$$

sind alle benötigten Axiome erfüllt: die Funktionen bilden einen „unitären Vektorraum quadratisch intergrierbarer Funktionen", $L_2([a,b])$.

Mathematische Ergänzungen:

* Sesquilinearform: $\langle \vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle$

  $\langle \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = \lambda_1^* \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle + \lambda_2^* \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle$
* Hermitesch: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^*$ [Es folgt: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$.]
* Wenn eine hermitesche Sesquilinearform positiv definit ist, nennen wir sie ein Skalarprodukt.
* Ein komplexer Vektorraum mit einem hermiteschen Skalarprodukt heisst ein unitärer Vektorraum.

Wenn wir einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt haben, möchten wir dort gerne eine orthonormierte Basis definieren.

„Lineare Hülle":
$Lin(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) :=$
$\{\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$

Verlangt wird:
* $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$,
  d.h. Orthonormalität
  ($\Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit)
* $Lin(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$,
  oft genannt Vollständigkeit.

Was bedeuten diese Begriffe in Funktionenräumen?

Orthonormalität: Falls V zwar unendlichdimensional aber noch „abzählbar" ist, d.h. mit einer diskreten Menge von Basisfunktionen, bleibt $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, $i,j \in \mathbb{N}$ unverändert. Falls die Basis „überabzählbar" ist, muss etwas anderes getan werden.

Vollständigkeit: Auch im abzählbaren Fall ist unklar was $n \to \infty$ hier impliziert. Mathematisch:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle \vec{v}_i \qquad \forall\ \vec{u} \in V$$

Benutze Standard-Skalarprodukt und schreibe alles in Komponentenform bzgl. Standardbasis:

$$(\vec{u})_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\vec{v}_i)^*_k (\vec{u})_k (\vec{v}_i)_j$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i)_j (\vec{v}_i)^*_k \right\} (\vec{u})_k \qquad \forall\ \vec{u} \in V,\ \forall\ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Nur möglich falls

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i)_j (\vec{v}_i)^*_k = \delta_{jk}.}$$

Bei Funktionen spielt aber x die Rolle des Indexes (vgl. Skizze auf Seite 1). Man braucht also

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f_i^*(y) = „\delta_{x,y}" = ?$$

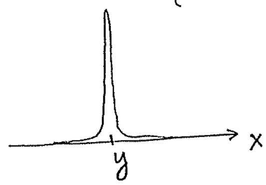
Die Bedeutung der Orthonormalität im überabzählbaren Fall sowie die der Vollständigkeit in allen unendlichdimensionalen Fällen, können in der Praxis durch die Einführung der Diracschen Deltafunktion deutlich gemacht werden.

Dirac - δ

Skizze:

Kronecker - δ : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$; $\sum_k \delta_{ik} = 1 \; \forall i$.

↳ Dirac - δ : $\delta(x-y) = \begin{cases} ?, & x=y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$; $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x-y) = 1 \; \forall y$.



Beispiele:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) \quad \text{mit}$$

* $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - i\varepsilon}$.

Definition:

Sei $T(x)$ eine glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktion, die ausserhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.

Die Dirac-δ ist eine „Distribution", die durch ihren Einfluss auf Testfunktionen definiert wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; T(x) \; \delta(x-y) := T(y)$$

Ihre Ableitungen folgen durch partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; T(x) \; \delta'(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d}{dx}\left(T(x)\,\delta(x-y)\right) - T'(x)\,\delta(x-y) \right]$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \; T'(x) \; \delta(x-y) = -T'(y).$$

Ihr Integral ist die Stufenfunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; T(x) \; \Theta'(x-y) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \; T'(x) \, \Theta(x-y)$$

$$:= -\int_{y}^{\infty} dx \; T'(x)$$

$$= -\left[T(x)\right]_y^{\infty} = T(y).$$

Wichtige Eigenschaften:

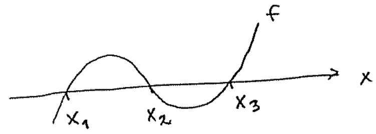
(i) „ $\delta(y-x) = \delta(x-y)$ ", denn $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(y-x) \overset{\substack{x=y-x' \\ dx=-dx'}}{\downarrow} -\int_{\infty}^{-\infty} dx'\, T(y-x')\, \delta(x')$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T(y-x')\, \delta(x') = T(y)$.

(ii) „ $\delta(c(x-y)) = \frac{1}{|c|}\delta(x-y)$ ", denn $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(c(x-y)) \overset{\substack{x=y+\frac{x'}{|c|} \\ dx=\frac{dx'}{|c|}}}{\downarrow} \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T\left(y+\frac{x'}{|c|}\right) \delta\left(\frac{c}{|c|}x'\right)$

$\overset{(i)}{=} \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T\left(y+\frac{x'}{|c|}\right)\delta(x') = \frac{1}{|c|}T(y)$.

(iii) „ $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ " wobei $\{x_i\}$ die Nullstellen sind: $f(x_i)=0$.



Denn: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(f(x))$

$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-\Delta}^{x_i+\Delta} dx_i'\, T(x_i')\, \delta(f(x_i'))$.

Taylor-Entwicklung um x_i:

$f(x_i') = \underbrace{f(x_i)}_{0} + (x_i'-x_i)\, f'(x_i) + \mathcal{O}(x_i'-x_i)^2$

$= (x_i'-x_i)\left[f'(x_i) + \mathcal{O}(x_i'-x_i)\right]$.

Substitution $x_i' = x_i + \varepsilon_i$ führt zu

$\ldots = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\Delta}^{\Delta} d\varepsilon_i\, T(x_i+\varepsilon_i)\, \delta\Big(\varepsilon_i \underbrace{\left[f'(x_i)+\mathcal{O}(\varepsilon_i)\right]}_{\neq 0 \text{ bei } \varepsilon_i \approx 0}\Big)$

$\overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\, T(x_i)$.

(iv) „ $g(x)\,\delta(x-y) = g(y)\,\delta(x-y)$ ", denn $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, g(x)\, \delta(x-y) = T(y)\, g(y)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, g(y)\, \delta(x-y)$.

Allgemeinere Darstellung:

Es gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$ falls $f_\varepsilon(x)$ integrierbar ist und Folgendes gilt:

(i) $\forall\, \delta > 0$ bleibt $\int_{-\delta}^{\delta} dx\, |f_\varepsilon(x)|$ beschränkt, d.h. unter einer von ε unabhängigen Schranke;

(ii) $\forall\, \delta > 0$ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\delta}^{\delta} dx\, f_\varepsilon(x) = 1$;

(iii) $\forall\, 1>\delta>0$ konvergiert $f_\varepsilon(x)$ gleichmässig gegen Null bei $\delta \leq |x| \leq \frac{1}{\delta}$.

— · — o —