Übungen zur Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 03**	6.11.2006

[Mo 13.11.2006, 12:15, D6-135 / Mi 15.11.2006, 12:15, D6-135]

Notation: $\mathbf{p} \equiv \vec{p}$, usw!

Aufgabe 1: Zeigen Sie ausgehend von der Klein-Gordon-Gleichung $[\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2]\phi = 0$, daß $Q \equiv i \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \{\phi^*\, \partial_0\, \phi - \phi\, \partial_0\, \phi^*\}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 2: Ersetzen Sie nun $\phi \to \hat{\phi}$, $\phi^* \to \hat{\phi}^\dagger$, $Q \to \hat{Q} \equiv i \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \{\hat{\phi}^\dagger\, \partial_0\, \hat{\phi} - \hat{\phi}\, \partial_0\, \hat{\phi}^\dagger\}$, wo

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_\mathbf{p}}} \left[\hat{a}_\mathbf{p}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, e^{ip\cdot x} \right], \quad (1)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_\mathbf{p}}} \left[\hat{b}_\mathbf{p}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\, e^{ip\cdot x} \right], \quad (2)$$

mit $p = (\, E_\mathbf{p}\, ,\, \mathbf{p}\,)$ bzw. $E_\mathbf{p} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Vertauschungsrelationen

$$\left[\, \hat{a}_\mathbf{p}\, ,\, \hat{a}^\dagger_\mathbf{q}\, \right] = \left[\, \hat{b}_\mathbf{p}\, ,\, \hat{b}^\dagger_\mathbf{q}\, \right] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})\,,$$

daß gilt

$$\hat{Q} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{p} \left[\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{a}_\mathbf{p} + \hat{a}_\mathbf{p}\, \hat{a}^\dagger_\mathbf{p}) - \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{b}_\mathbf{p} + \hat{b}_\mathbf{p}\, \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}) \right] = \int \mathrm{d}^3\mathbf{p} \left[\hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{a}_\mathbf{p} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{b}_\mathbf{p} \right]. \quad (3)$$

Aufgabe 3: Sei $|\pi^+(\mathbf{p})\rangle \equiv \hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\, |0\rangle$, wobei $|0\rangle$ den Vakuumzustand bezeichnet. Leiten Sie die Orthogonalitätsrelation $\langle \pi^+(\mathbf{p}) | \pi^+(\mathbf{q}) \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ her.

Aufgabe 4: Der Hamilton-Operator eines freien komplexen Klein-Gordon-Feldes lautet

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left\{ \partial_0\hat{\phi}\, \partial_0\hat{\phi}^\dagger + \nabla\hat{\phi}^\dagger \cdot \nabla\hat{\phi} + m^2\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi} \right\}.$$

Überzeugen Sie sich davon, daß sich dieser mittels (1) und (2) überführen läßt in

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, E_\mathbf{p} \left[\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{a}_\mathbf{p} + \hat{a}_\mathbf{p}\, \hat{a}^\dagger_\mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{b}_\mathbf{p} + \hat{b}_\mathbf{p}\, \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}) \right] \\ &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, E_\mathbf{p} \left[\hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{a}_\mathbf{p} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\, \hat{b}_\mathbf{p} + \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, daß, falls das Volumen V des Systems endlich ist, gilt

$$\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\,.$$

Was ist die physikalische Interpretation für diesen Teil des Hamilton-Operators

$$\frac{\Delta\hat{H}}{V} = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, E_\mathbf{p} \qquad ?$$