8.3 $W^\pm$, Z^0, γ im Standardmodell

Wir haben gelernt, daß Eichinvarianz keine direkte Massenterme für $W^\pm, Z^0$ erlaubt. Jedoch erlaubt sie eine Wechselwirkung zwischen Spin-1-Feldern und einem Spin-0-Feld, dem Higgs-Feld; S. 83:

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix}$$

$$\delta \hat{\mathcal{L}} = [D_\mu \hat{\Phi}]^\dagger [D^\mu \hat{\Phi}]$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_W T^a \hat{A}^a_\mu + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu$$

$$T^a \equiv \frac{\tau^a}{2} \quad ; \quad \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tau^i \tau^j = \delta^{ij} \cdot \mathbb{1}_{2\times 2} + i \varepsilon^{ijk} \tau^k$$

Wie bekommt man von hier eine Masse?

Nehmen wir an, daß es durch irgendeine Dynamik (Abschnitt 8.4) so passiert, daß es in guter Näherung $\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ gilt, wo v eine Konstante ist.

$$\Rightarrow \quad \delta \hat{\mathcal{L}} \approx \frac{1}{2} \left[\left(-i g_W T^a \hat{A}^a_\mu + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[\left(-i g_W T^b \hat{A}^{b\mu} + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (0 \ v) \left(\frac{i g_W}{2} \tau^a \hat{A}^a_\mu - \frac{i g_Y}{2} \hat{B}_\mu \right) \left(-\frac{i g_W}{2} \tau^b \hat{A}^{b\mu} + \frac{i g_Y}{2} \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{v^2}{8} (0 \ 1) \Big(g_W^2 \tau^a \tau^b \hat{A}^a_\mu \hat{A}^{b\mu} - g_Y g_W \tau^a \left[\hat{A}^a_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}^\mu \hat{A}^{a\mu} \right] + g_Y^2 \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \Big) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S. 19 $\Rightarrow$ Gleichzeitige Feldoperatoren wie $\hat{A}^a_\mu$, $\hat{A}^{b\mu}$, $\hat{B}^\mu$ vertauschen sich.

Damit ist:

(i) $$(0\ 1)\ \tau^a\tau^b\ \hat{A}^a_\mu \hat{A}^{b\mu} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= (0\ 1) \Big[\delta^{ab}\mathbb{1}_{2\times2} + \underbrace{i\varepsilon^{abc}\tau^c}_{\text{antisymmetrisch in } a\leftrightarrow b} \Big] \hat{A}^a_\mu \hat{A}^{b\mu} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad = \quad \hat{A}^a_\mu \hat{A}^{a\mu}$$

(ii) $$(0\ 1)\ \tau^a \left[\hat{A}^a_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}^\mu \hat{A}^{a\mu}\right] \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\left[\hat{A}^3_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}^\mu \hat{A}^{3\mu}\right]$$

(iii) $$(0\ 1)\ \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu$$

$$\Rightarrow \quad \delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{g_w v}{2}\right)^2 \sum_{a'=1}^{2} \hat{A}^{a'}_\mu \hat{A}^{a'\mu}$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{2}\right)^2 \left[g_w^2 \hat{A}^3_\mu \hat{A}^{3\mu} + g_Y g_w \left(\hat{A}^3_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}_\mu \hat{A}^{3\mu}\right) + g_Y^2 \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \right] \qquad (*)$$

Jetzt müßen wir diese Struktur "diagonalisieren". Das heißt, wir führen eine neue Basis ein, durch

$$\begin{pmatrix}\hat{Z}_\mu\\ \hat{Q}_\mu\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\cos\theta_w & \sin\theta_w\\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{A}^3_\mu\\ \hat{B}_\mu\end{pmatrix},$$

wo $\theta_w \equiv$ Weinberg-Winkel.(*) Dann schreiben wir (*) neu als

$$[\ldots] = \left(g_w \hat{A}^3_\mu + g_Y \hat{B}_\mu\right)\left(g_w \hat{A}^{3\mu} + g_Y \hat{B}^\mu\right)$$
$$\equiv \left(g_w^2 + g_Y^2\right)\left(\frac{g_w}{\sqrt{g_w^2+g_Y^2}}\hat{A}^3_\mu + \frac{g_Y}{\sqrt{g_w^2+g_Y^2}}\hat{B}_\mu\right)$$
$$\times \left(\frac{g_w}{\sqrt{g_w^2+g_Y^2}}\hat{A}^{3\mu} + \frac{g_Y}{\sqrt{g_w^2+g_Y^2}}\hat{B}^\mu\right)$$

(*) Oder "schwache Mischungswinkel"

Wir identifizieren den Weinberg-Winkel als

$$\cos\Theta_W \equiv \frac{g_W}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}} \quad , \quad \sin\Theta_W \equiv \frac{g_Y}{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}} \; ,$$

und schreiben

$$\frac{g_W v}{2} \equiv m_W \quad , \quad \frac{\sqrt{g_W^2 + g_Y^2}\, v}{2} \equiv m_Z \, .$$

Damit wird

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m_W^2 \sum_{a'=1}^{2} \hat{A}_\mu^{a'} \hat{A}^{a'\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 \hat{Z}_\mu \hat{Z}^\mu + 0 \cdot \hat{Q}_\mu \hat{Q}^\mu \, .$$

In der Coulomb-Eichung (S.16 ; $\hat{A}_0^a = \hat{B}_0 = 0$) :

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} m_W^2 \sum_{a'=1}^{2} \hat{A}_i^{a'} \hat{A}_i^{a'} - \frac{1}{2} m_Z^2 \hat{Z}_i \hat{Z}_i - 0 \cdot \hat{Q}_i \hat{Q}_i \, .$$

Die Interpretation:

* Zwei Teilchen mit Masse m_W $\Leftrightarrow$ $W^\pm$!
* ein Teilchen mit Masse $m_Z > m_W$ $\Leftrightarrow$ Z^0 !
* ein masseloses Feld $\hat{Q}_\mu$ $\Leftrightarrow$ γ !

<u>Genau was wir wollten!</u>

(Ein genauerer Vergleich mit Experiment kommt in den Übungen.)

Schreiben wir noch D_μ in der neue Basis. Im Allgemeinen:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_w T^a \hat{A}^a_\mu - i Q_Y g_Y \hat{B}_\mu$$

wo $Q_Y = -\frac{1}{2}$ für das Higgs (vgl. S. 83). Dies wird jetzt:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_w}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^1_\mu - i\hat{A}^2_\mu \\ \hat{A}^1_\mu + i\hat{A}^2_\mu & 0 \end{pmatrix} - i\frac{\sqrt{g_w^2+g_Y^2}}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta_w \hat{A}^3_\mu + 2Q_Y \sin\theta_w \hat{B}_\mu & 0 \\ 0 & -\cos\theta_w \hat{A}^3_\mu + 2Q_Y \sin\theta_w \hat{B}_\mu \end{pmatrix}$$

Kopplung von $W^\pm$ zu "geladenen Strömen" (S. 75).

Kopplung von Z^0, γ zu "neutralen Strömen" (S. 76).

Um eksplizit zu sein:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^3_\mu \\ \hat{B}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{Z}_\mu \\ \hat{Q}_\mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -i\frac{\sqrt{g_w^2+g_Y^2}}{2}\begin{pmatrix} [\cos^2\theta_w + 2Q_Y \sin^2\theta_w]\hat{Z}_\mu + \cos\theta_w \sin\theta_w(-1+2Q_Y)\hat{Q}_\mu & 0 \\ 0 & [-\cos^2\theta_w + 2Q_Y\sin^2\theta_w]\hat{Z}_\mu + \cos\theta_w \sin\theta_w (1+2Q_Y)\hat{Q}_\mu \end{pmatrix}$$

Für das Higgs-Boson $Q_Y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ die untere Komponente ist elektrisch neutral (keine Kopplung zu $\hat{Q}_\mu$).

$\Rightarrow$ die obere Komponente hat die Kopplung

$$i\sqrt{g_w^2+g_Y^2}\cos\theta_w \sin\theta_w \equiv ie$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{e = g_w \sin\theta_w}} \quad .$$

(vgl. Übungen)

— · —