8. Das elektroschwache Standardmodell

Die Teilchen, der wir schon begegnet sind (Quarks, Leptonen, Photon, Gluonen, $W^{\pm}$, Z^{0}), und die entsprechenden Naturgesetze (elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkungen) sind alles, was bis heute experimentell verifiziert werden ist. Warum brauchen wir dennoch etwas Besseres?

8.1 Renormierbarkeit

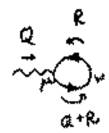
Wir haben bis jetzt meistens Prozesse der "Baum-Niveaus" betrachtet, zum Beispiel

 (1)

Aber sind Schleifen-Korrekturen wirklich klein (in der QED oder in der elektroschwachen Theorie)?

Betrachten wir die Größenordnung von . (2)

Die Amplitude:

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) \times$$  $$\times (-1)$$

S. 47, 49

$$\sim \mathcal{M}(1) \times \frac{i}{Q^2} \times e^2 \times \int \frac{d^4R}{(2\pi)^4} \quad \mathrm{Sp}\left[i\gamma^{\mu} \frac{i(\not{R}+m)}{R^2-m^2} i\gamma^{\nu} \frac{i(\not{Q}+\not{R}+m)}{(Q+R)^2-m^2} \right]$$

S. 55

$$= \mathcal{M}(1) \times \frac{-4ie^2}{Q^2} \times \int \frac{d^4R}{(2\pi)^4} \cdot \frac{2R^{\mu}R^{\nu} + Q^{\mu}R^{\nu} + Q^{\nu}R^{\mu} - \eta^{\mu\nu}\left[R^2 + R\cdot Q - m^2\right]}{\left[R^2-m^2\right]\left[(Q+R)^2-m^2\right]}$$

Dieses Integral ist aber divergent, und zwar auf zwei Weisen:

* Für $r_0 = \pm\sqrt{\vec{r}^2+m^2}$ und $r_0 = -q_0 \pm \sqrt{(\vec{q}+\vec{r})^2+m^2}$ ("auf der Massenschale") sind die Nenner gleich null. Eine genauere Definition der Propagatoren sagt aber, wie die Polen umgegangen werden sollen.
* Für große $|\vec{r}|$. Um dieses zu verstehen, betrachten wir den Teil $-\eta^{\mu\nu}\left[R^2 + R\cdot Q - m^2\right]$.

→

Schreiben wir nun

$$R^2 + R\cdot Q - m^2 = R^2 + \frac{1}{2}\left[(Q+R)^2 - R^2 - Q^2\right] - m^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[R^2 - m^2\right] + \frac{1}{2}\left[(Q+R)^2 - m^2\right] - \frac{1}{2}Q^2 \quad ,$$

wird das Integral

$$-\eta^{\mu\nu}\left\{ \underbrace{\int \frac{d^4R}{(2\pi)^4}\frac{1}{R^2-m^2}}_{\text{quadratisch divergent !}} - \frac{Q^2}{2}\underbrace{\int \frac{d^4R}{(2\pi)^4}\frac{1}{[R^2-m^2][(Q+R)^2-m^2]}}_{\text{logarithmisch divergent !}} \right\}$$

(vgl. Übungen)

Die Korrekturen sind also, im Allgemeinen, nicht klein, sondern unendlich ! Das scheint eine Katastrophe zu sein.

Es gibt allerdings Theorien, in denen es bewiesen werden kann, daß sich alle solche Divergenzen kürzen, wenn wir nur Beziehungen zwischen physikalisch messbaren Größen zu einer konsistenten Ordnung in Kopplungskonstanten berechnen. Solche Theorien werden "renormierbar" genannt.

Wann ist eine Theorie renormierbar (und damit wohldefiniert) ?

(i) Die Lagrange-Dichten für Photonen, Gluonen und $W^\pm, Z^0$-Teilchen sollten "eichinvariant" sein.

['t Hooft, Veltman 1971]

(ii) In der Lagrange-Dichte können nur Wechselwirkungen auftauchen, die aus entweder drei (Bosonen, Fermionen) oder vier (Bosonen) Felder bestehen.

[Dies ist das zweite Argument, neben Unitarität, für den Verzicht auf das Fermi-Modell!]

Was heißt Eichinvarianz? Betrachten wir den ("abelschen") Fall der QED.

Wir haben bislang nur den Wechselwirkungsteil $\hat{\mathcal{L}}_I$ der Lagrange-Dichte untersucht. Es gibt aber auch einen quadratischen Teil, der die Propagatoren (und damit Massen) der verschiedenen Teilchen bestimmt.

Die Eichtransformation:

$$\text{S.16} \Rightarrow \quad \hat{A}_\mu \to \hat{A}'_\mu \equiv \hat{A}_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x).$$

[Auf S.16 hatten wir ϕ statt $\frac{\alpha}{e}$, und betrachteten klassische Felder statt Operatoren.]

Versuchen wir jetzt eine Masse zu $\hat{A}_\mu$ zu geben. Um lorentzinvariant zu bleiben, wäre die einzige Möglichkeit

$$\delta\hat{\mathcal{L}} \propto \frac{1}{2} m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu$$

Dieser Term ist aber, im Allgemeinen, nicht eichinvariant:

$$\frac{1}{2} m^2 \hat{A}'_\mu \hat{A}'^\mu - \frac{1}{2} m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu = e^{-1} m^2 \hat{A}^\mu \partial_\mu \alpha + \frac{1}{2} e^{-2} m^2 (\partial_\mu \alpha)^2$$

Das heißt, Theorien mit solchen Masstermen sind, im Allgemeinen, nicht renormierbar. Dies ist kein Problem mit Photonen und Gluonen, die sowieso keine Masse haben, aber wie ist es mit $W^\pm, Z^0$-Teilchen, die sehr schwer sind?

Untersuchen wir zuerst, ob wir Massen zu Skalaren und Fermionen geben können.

Skalaren:

$$\hat{\phi} \to \hat{\phi}' \equiv e^{i\alpha(x)} \hat{\phi}$$
$$\hat{\phi}^+ \to \hat{\phi}'^+ \equiv e^{-i\alpha(x)} \hat{\phi}^+$$

$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} = m^2 \hat{\phi}^+ \hat{\phi}$ ist invariant $\Rightarrow$ Ja!

Fermionen: Wir haben gesehen, daß die links- und rechtshändigen Fermionen im Allgemeinen verschiedene Wechselwirkungen fühlen:

$$\hat{\psi}_L \to \hat{\psi}'_L \equiv e^{i\alpha(x)} \hat{\psi}_L$$
$$\hat{\psi}_R \to \hat{\psi}'_R \equiv e^{i\beta(x)} \hat{\psi}_R$$

Aber die entsprechenden quadratischen Lorentz-Invarianten verschwinden:

$$\hat{\bar{\psi}}_L \hat{\psi}_L = \hat{\bar{\psi}} P_R P_L \hat{\psi} = \hat{\bar{\psi}} \frac{1}{4}(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)\hat{\psi} = 0$$

Aufgabe 10.1

$\Rightarrow$ Nein!

Die große Idee des Standardmodelles [Glashow, Weinberg, Salam 1967]:

Es gibt ein Skalarfeld, das eine Masse hat.
Dieses Feld wechselwirkt mit den anderen Feldern. (vgl. Übungen)
Damit kriegen die anderen Teilchen auch eine Masse.
Wir werden später sehen, wie dies genau passiert.

Fazit:

* Eichinvarianz $\Rightarrow$ Renormierbarkeit $\Rightarrow$ eine "gesunde" Theorie
* Eichinvarianz erlaubt aber keine Massen für $W^\pm, Z^0$!
* Eichinvarianz erlaubt jedoch eine Wechselwirkung zwischen $W^\pm, Z^0$ und einem "massiven" Skalarfeld. Das heißt, wir müßen wieder ein neues Teilchen einführen.

— o —