

7.4 Unitaritätsgrenze

73

Das Fermi-Modell ist sehr erfolgreich in der Beschreibung fast aller schwachen Zerfälle, aber es kann dennoch nicht die ganze Wahrheit sein! Warum?

Betrachten wir zum Beispiel die Streuung $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$ im Schwerpunktsystem. Sei $s = (Q_1 + Q_2)^2$ die invariante Energie-Quadrat. Wie behält sich der Wirkungsquerschnitt σ für große s ?

Dimensionale Analyse:

* M hat immer G_F

$$\Rightarrow |M|^2 \sim G_F^2$$

$$* [\sigma] = [\text{Querschnitt}] = [\text{fm}^2] = \left[\frac{1}{\text{GeV}^2} \right]$$

* Für $s \gg m_e^2$ gibt es keine andere Skalen!

$$\Rightarrow \sigma \propto G_F^2 \cdot s$$

$$* \text{Die genaue Antwort: } \sigma = \frac{G_F^2 s}{3\pi}$$

Ein solches Verhalten kann aber nicht richtig sein!

Betrachten wir die Streumatrix \hat{S} . Für $|f\rangle \neq |i\rangle$ haben wir auf S. 30-31, 37 folgendes definiert:

$$S_{fi} \equiv \langle f | \hat{S} | i \rangle = -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) T_{fi}$$

Im Allgemeinen:

$$\hat{S} \equiv \mathbb{1} - i\hat{T} \quad ; \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) T_{fi} \equiv \langle f | \hat{T} | i \rangle,$$

wo \hat{T} die Transfermatrix ist, und $\hat{S} \equiv \hat{U}_I(+\infty, -\infty)$.

\hat{S} ist unitär

\Leftrightarrow "Gesamtwahrscheinlichkeit bleibt erhalten"

$$\Leftrightarrow \hat{S}^\dagger \hat{S} = \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbb{1} + i\hat{T}^\dagger)(\mathbb{1} - i\hat{T}) = \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) = \hat{T}^\dagger \hat{T}$$

Nehmen wir nun das Matrixelement :

$$i \langle f | \hat{T} - \hat{T}^\dagger | i \rangle = \sum_n \langle f | \hat{T} | n \rangle \langle n | \hat{T}^\dagger | i \rangle$$

$$i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma P_f - \Sigma Q_i) [T_{fi} - T_{if}^*] = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma P_f - \Sigma R_n) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma R_n - \Sigma Q_i) T_{fn} T_{in}^*$$

$$i [T_{fi} - T_{if}^*] = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma R_n - \Sigma Q_i) T_{fn} T_{in}^*$$

(Diese Formel ist mit dem klassischen "Optischen Theorem" verwandt.)

Nun ist $T_{fi} \propto \mathcal{M}$ (vgl. S. 37). Darum sagt diese Formel etwas darüber, was für ein Verhalten \mathcal{M} haben kann, und, nach Phasenraumintegrationen, auch etwas darüber, was für ein Verhalten \mathcal{Z} haben kann.

Die genaue Analyse ist etwas kompliziert, aber am Ende findet man eine "Froissart-Grenze". Diese sagt, daß \mathcal{Z} für große s höchstens als ein Logarithmus wachsen kann.

Ein lineares Wachstum wie auf S. 93 würde aber Unitarität / Wahrscheinlichkeitserhaltung verletzen!

Es gibt auch eine andere Überlegung, genannt Renormierbarkeit, (vgl. später), die ebenso zum Fazit führt, daß das Fermi-Modell nur für kleine Impulsskalen ($s \lesssim G_F^{-2}$) richtig sein kann.

Wegen theoretischer Überlegungen allein wissen wir also, daß das Fermi-Modell keine komplette Theorie der schwachen Wechselwirkungen ist!

7.5 W^\pm, Z^0 - Teilchen

75

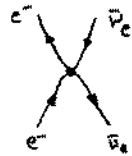
Die Auflösung des Rätsels ist ganz genial [O.Klein 1938]:

(i) Schreiben wir $G_F \equiv \frac{g_w^2}{4\sqrt{2} m_W^2}$, wo g_w, m_w zwei momentan unbekannte Parameter sind.

(ii) Schreiben wir $J_+^\mu \equiv \sum_{D_L} \hat{D}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L$; $(J_+^\mu)^\dagger = \sum_{D_L} \hat{D}_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L$.

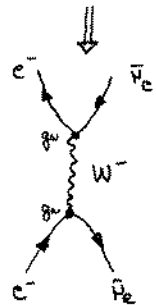
(iii) Dann erhalten wir eine neue Darstellung für das Fermi-Modell:

$$\hat{\mathcal{L}}_I = - \frac{g_w^2}{2} J_+^\mu \cdot \frac{\eta_{\mu\nu}}{m_W^2} \cdot (J_+^\nu)^\dagger$$



(iv) Jetzt ersetzen wir diesen Ausdruck mit:

$$\hat{\mathcal{L}}_I \equiv i \cdot \frac{g_w^2}{2} J_+^\mu \underbrace{\frac{i}{s - m_W^2} (-\eta_{\mu\nu})}_{\text{wie ein Photon-Propagator aber mit Masse!}} (J_+^\nu)^\dagger$$



(v) Für $s \ll m_W^2$ ändert sich nichts, aber

$$\text{für } s \gg m_W^2 \text{ wird } \mathcal{Z}_{\text{tot}} = \frac{G_F^2 s}{3\pi} \cdot \left(\frac{m_W^2}{s - m_W^2} \right)^2 \approx \frac{G_F^2 m_W^4}{3\pi s} !$$

Also durch die Einführung neuer Teilchen, die einen Vertex haben wie schon in der QED und QCD, wird das Problem gelöst!

Im Gegensatz zu Photonen und Gluonen, haben diese Teilchen (W^- und das Antiteilchen W^+) eine Masse m_w , und eine elektrische Ladung.

Die Objekte $J_+^\mu, (J_+^\mu)^\dagger$ heißen "geladene Ströme".

Die W^\pm -Teilchen wurden 1983 am CERN entdeckt, mit der Masse $m_w = 80.485 \pm 0.038$ GeV. Sie sind auch als "intermediäre Vektorbosonen" bekannt.

Es zeigt sich allerdings, daß obwohl das Problem mit $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$ durch W^\pm gelöst wird, gibt es einige andere Prozesse, wo dies noch nicht der Fall ist: man braucht auch "neutrale Ströme", und einen ungeladenen Partner der W 's, das Z^0 . [Bludman 1958]

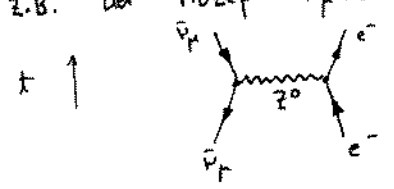
$$J_0^\mu = \sum_D \hat{D} \begin{pmatrix} c_V^D \gamma^\mu + c_A^D \gamma^\mu \gamma_5 & 0 \\ 0 & c_V^D \gamma^\mu + c_A^D \gamma^\mu \gamma_5 \end{pmatrix} \hat{D}$$

Also jetzt nicht mehr rein "V-A", $c_V^D, c_A^D, c_V^D, c_A^D$ sind gewisse numerische Koeffizienten (vgl. später).

$$\hat{L}_I \equiv i \frac{g_w^2}{2} J_0^\mu \frac{i}{s - m_Z^2} (-\eta_{\mu\nu}) J_0^\nu \quad ; \quad m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

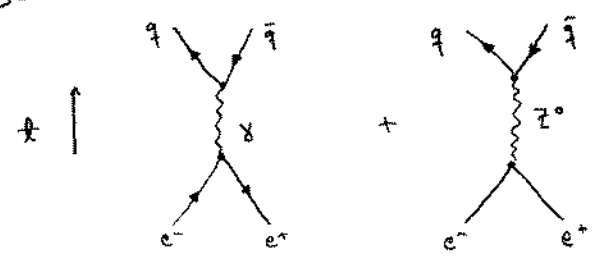
Zwei sehr schöne Konsequenzen davon:

(i) Jetzt haben auch Neutrinos direkte Wechselwirkungen, und z.B. der Prozeß $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$ ist möglich:



Durch diesen Prozeß wurden "neutrale Ströme" 1973 an CERN experimentell nachgewiesen.

(ii) Betrachten wir $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ (vgl. Abschnitt 6.2)



QED; $s \gg \Rightarrow \sim \frac{1}{s}$ schwach; $s \approx \Rightarrow \sim \frac{s}{(s - m_Z^2)^2}$!

Experimentell:

