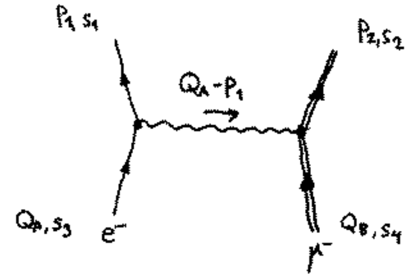
## 5.2 Elektron – Myon – Streuung

Auf S. 52 haben wir eine Amplitude für Elektron-Myon-Streuung gefunden:




$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(Q_A - P_1)^2}\, \bar{u}(\bar{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\bar{q}_A, s_3)\; \bar{u}(\bar{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\bar{q}_B, s_4)$$

Jetzt wollen wir $|\mathcal{M}|^2$ auswerten.

Um die Aufgabe etwas einfacher zu machen, werden wir vermuten (wie in der Tat in meisten Experimenten der Fall ist), daß im Anfangszustand die Spinorientierungen willkürlich verteilt sind, und im Endzustand nur die Anzahl der Teilchen gezählt wird. Das heißt, wir nehmen den Mittelwert über alle anfänglichen Spinkonfigurationen, und die Summe über alle Spinkonfigurationen im Endzustand.

$$\text{Also}\quad |\mathcal{M}|^2 \Rightarrow \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{4} \sum_{s_1=\pm1} \sum_{s_2=\pm1} \sum_{s_3=\pm1} \sum_{s_4=\pm1} |\mathcal{M}|^2$$

Hier:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(Q_A - P_1)^4} \sum_{\mu\nu} \bar{u}(\bar{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\bar{q}_A, s_3)\, [\bar{u}(\bar{p}_1, s_1)\gamma^\nu u(\bar{q}_A, s_3)]^*\; \bar{u}(\bar{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\bar{q}_B, s_4)\,[\bar{u}(\bar{p}_2, s_2)\gamma_\nu u(\bar{q}_B, s_4)]^*$$

Weil $\bar{u}\gamma^\nu u$ ein Skalar ist, (keine Matrix), gilt

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(\bar{p}_1, s_1)\gamma^\nu u(\bar{q}_A, s_3)]^* &= [\bar{u}(\bar{p}_1, s_1)\gamma^\nu u(\bar{q}_A, s_3)]^\dagger \\
&= [u^\dagger(\bar{p}_1, s_1)\gamma^0\gamma^\nu u(\bar{q}_A, s_3)]^\dagger \\
&= u^\dagger(\bar{q}_A, s_3)(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger u(\bar{p}_1, s_1) \qquad \Big|\, (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\,;\ (\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \\
&= \bar{u}(\bar{q}_A, s_3)\gamma^\nu u(\bar{p}_1, s_1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4(Q_A - P_1)^4} \sum_{s_i=\pm1} \bar{u}(\bar{p}_1, s_1)\gamma^\mu u(\bar{q}_A, s_3)\, \bar{u}(\bar{q}_A, s_3)\gamma^\nu u(\bar{p}_1, s_1)$$
$$\times\ \bar{u}(\bar{p}_2, s_2)\gamma_\mu u(\bar{q}_B, s_4)\, \bar{u}(\bar{q}_B, s_4)\gamma_\nu u(\bar{p}_2, s_2)$$

Jetzt erinnern wir uns an die Vollständigkeitsrelation (S. 25):

$$\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) = \not{p} + m\cdot\mathbb{1}.$$

Ausserdem können wir schreiben:

$$\sum_{s_1} \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\, \underbrace{M}_{\text{irgendeine Matrix}}\, u(\vec{p}_1,s_1) \underbrace{=}_{\text{in Komponentenform}} \sum_{s_1} \bar{u}_\alpha(\vec{p}_1,s_1)\, M_{\alpha\beta}\, u_\beta(\vec{p}_1,s_1)$$

$$= \sum_{s_1} M_{\alpha\beta}\, u_\beta(\vec{p}_1,s_1)\, \bar{u}_\alpha(\vec{p}_1,s_1)$$

$$= \sum_{s_1} Sp\left[ M u(\vec{p}_1,s_1)\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\right]$$

$$= Sp\left[M(\not{P}_1 + m_e)\right]$$

Damit erhalten wir

$$\langle |\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4\,(Q_A-P_1)^4}\; \underbrace{Sp\left[\gamma^\mu(\not{Q}_A + m_e)\gamma^\nu(\not{P}_1+m_e)\right]}_{\text{Elektronteil}}\; \underbrace{Sp\left[\gamma_\mu(\not{Q}_B+m_\mu)\gamma_\nu(\not{P}_2+m_\mu)\right]}_{\text{Myonteil}}.$$

Keine Spinoren mehr!

Der nächste Schritt ist die Auswertung der Spuren über $\gamma$-Matrizen.
Es läßt sich beweisen (vgl. Übungen):

$$Sp\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] = 4\eta^{\mu\nu}$$
$$Sp\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varsigma\right] = 0$$
$$Sp\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varsigma\gamma^\lambda\right] = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\varsigma\lambda} - \eta^{\mu\varsigma}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\varsigma}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Sp\left[\gamma^\mu(\not{Q}_A+m_e)\gamma^\nu(\not{P}_1+m_e)\right] = (Q_A)_\alpha (P_1)_\beta \; Sp\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\right] + m_e^2 \; Sp\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]$$

$$= 4\left\{(Q_A)_\alpha(P_1)_\beta\left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right] + m_e^2\,\eta^{\mu\nu}\right\}$$

$$= 4\left\{Q_A^\mu P_1^\nu + Q_A^\nu P_1^\mu - \eta^{\mu\nu}\left[Q_A\cdot P_1 - m_e^2\right]\right\}$$

Gleicherweise:

$$Sp\left[\gamma_\mu(\not{Q}_B+m_\mu)\gamma_\nu(\not{P}_2+m_\mu)\right] = 4\left\{Q_{B\mu}P_{2\nu} + Q_{B\nu}P_{2\mu} - \eta_{\mu\nu}\left[Q_B\cdot P_2 - m_\mu^2\right]\right\}$$

Und damit haben wir letztendlich einen expliziten lorentzinvarianten Ausdruck für $\langle |M|^2\rangle$:

$$\langle |M|^2\rangle = \frac{4e^4}{(Q_A-P_1)^4}\left\{ \begin{aligned} & Q_A\cdot Q_B\; P_1\cdot P_2 + Q_A\cdot P_2\; Q_B\cdot P_1 + Q_A\cdot P_1\; m_\mu^2 - Q_A\cdot P_1\; Q_B\cdot P_2 \\ & + Q_A\cdot Q_B\; P_1\cdot P_2 + Q_A\cdot P_2\; Q_B\cdot P_1 + Q_A\cdot P_1\, m_\mu^2 - Q_A\cdot P_1\; Q_B\cdot P_2 \\ & + Q_B\cdot P_2\,(m_e^2 - Q_A\cdot P_1) + Q_B\cdot P_2\,(m_e^2 - Q_A\cdot P_1) \\ & + \eta^\mu{}_\mu\,\left(Q_A\cdot P_1\, Q_B\cdot P_2 - m_e^2\, Q_B\cdot P_2 - m_\mu^2\, Q_A\cdot P_1 + m_e^2 m_\mu^2\right) \end{aligned}\right\}$$

$Sp(1_{4\times4}) = 4$

$$= \frac{8e^4}{(Q_A-P_1)^4}\cdot\left\{Q_A\cdot Q_B\; P_1\cdot P_2 + Q_A\cdot P_2\; Q_B\cdot P_1 - m_\mu^2\, Q_A\cdot P_1 - m_e^2\, Q_B\cdot P_2 + 2m_e^2 m_\mu^2\right\}.$$

Diesen Ausdruck können wir dann in die Formel auf S. 43 einsetzen, um den physikalischen Wirkungsquerschnitt zu erhalten!

(oder besser noch, in die lorentzinvariante Formel aus Aufgabe 6.4!)

Nehmen wir ein Beispiel:

Ein Elektron streut an einem sehr viel schwereren "Myon" (Masse $m_\mu \gg m_e$). Betrachten wir das Laborsystem (Myon ruht). Der Grenzwert

$$\lim_{m_\mu \to \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

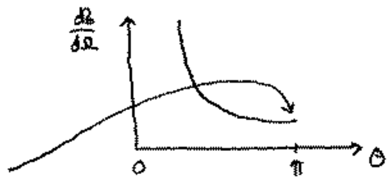
existiert, und entspricht der Annahme, daß der Rückstoß vernachlässigt werden kann:


Es folgt (vgl. Übungen):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\alpha_{EM}}{2\,|\vec{q}_A|^2 \sin^2(\theta/2)}\right]^2 \times \left[m_e^2 + |\vec{q}_A|^2 \cos^2\!\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right]$$

Dies ist die Mottsche Formel. Wenn das einlaufende Elektron nicht-relativistisch ist, gilt $|\vec{q}_A| = m_e v \ll m_e$, und wir erhalten die Rutherford-Formel, die auch die Elektron-Proton-Streuung beschreibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\alpha_{EM}}{2 m_e v^2 \sin^2(\theta/2)}\right]^2$$




Die Elektronen kehren manchmal sogar zurück in die Stoßrichtung!

## QED - Fazit

* QED ist wahrscheinlich die am genauesten verifizierte Theorie der Physik.
* Sie beschreibt alle elektromagnetische Wechselwirkungen. (Unter normalen nicht-relativistischen Bedingungen gibt es jedoch eine gute Näherung durch die Schrödinger-Gleichung.)
* Allerdings ist QED einigermaßen "langweilig": alles funktioniert "zu leicht", weil die Störungsentwicklung in $\alpha_{EM}/\pi$ sehr schnell zu konvergieren scheint.
* Auf einem grundsätzlicheren Niveau hat QED doch auch einige "theoretische" Probleme; mehr darüber in QFT.