

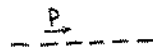
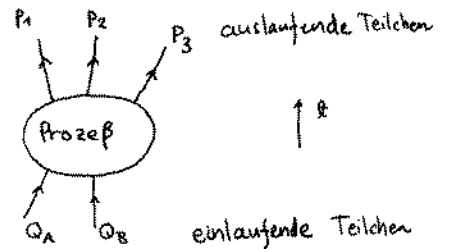
4.6 Die Feynman-Regeln

Wie berechnet man, im Allgemeinen, die Amplitude \mathcal{M} ? Es gibt ein graphisches Verfahren dafür, genannt die Feynman-Regeln bzw. die Feynman-Diagramme. Diese liefern auch eine "verständliche" physikalische Bedeutung zu quantenfeldtheoretischen Prozessen, und sind deswegen die am meisten benutzte "Sprache" in der Teilchenphysik.

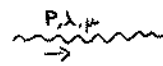
Bausteine:

① Externe Linien:

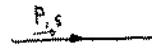
Die externen Linien werden durch ihren Viererimpuls $(Q_A, Q_B, P_1, P_2, P_3)$ geschildert. Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen haben auch einen Helizitätszustand s , Spin-1-Teilchen einen Polarisationszustand λ . Man benutzt verschiedene Arten von Linien für verschiedene Teilchen:



Spin-0 mit Viererimpuls $P \Rightarrow \delta \mathcal{M} = 1$



Spin-1-Teilchen (Photon) mit Viererimpuls P , Polarisation λ , Index $\mu \Rightarrow \delta \mathcal{M} = \epsilon_{\mu}^{\lambda}(P)$



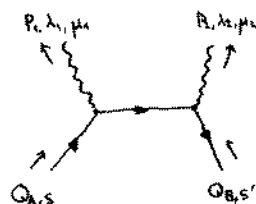
Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Elektron).
 Falls einlaufend (vgl. S. 26) $\Rightarrow \delta \mathcal{M} = u(\vec{p}, s)$
 auslaufend $\Rightarrow \delta \mathcal{M} = \bar{u}(\vec{p}, s)$



Spin- $\frac{1}{2}$ -Antiteilchen (Positron)
 Falls einlaufend (vgl. S. 26) $\Rightarrow \delta \mathcal{M} = \bar{v}(\vec{p}, s)$
 auslaufend $\Rightarrow \delta \mathcal{M} = v(\vec{p}, s)$

Beispiel:

$t \uparrow$



$$e^-(Q_A, s) + e^+(Q_B, s') \rightarrow \gamma(P_1, \lambda_1, \mu_1) + \gamma(P_2, \lambda_2, \mu_2)$$

② Vertizes

46

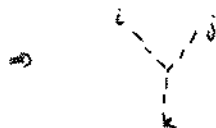
Schreibt man $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$, sind die Vertizes durch den Teil $g\hat{V}$ bestimmt. Was im Zeitentwicklungsoperator vorkommt, um genauer zu sein, ist $-i \int dt' g\hat{V}_I(t')$.

In der Lagrangischen Formulierung ist dies gleich $+i \int dt' \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{L}}_I$,

wo die Lagrange-Dichte ein Polynom in Feldoperatoren ist.

⇒ Für jeden Vertex schreiben wir einen Faktor ig , wo die "Kopplungskonstante" g der Koeffizient des Polynoms ist. Im Allgemeinen:

$$\hat{\mathcal{L}}_I = g_{ijk} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k + g_{jk\ell} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \hat{\phi}_\ell + \dots$$



⇒ $\delta\mathcal{M} = ig_{ijk}$



⇒ $\delta\mathcal{M} = ig_{jk\ell}$ usw.

③ Innere Linien

Falls es innere Linien im Feynman-Diagramm gibt (vgl. S. 45), schreibt man für jede Linie einen Propagator. Der Propagator hängt von dem Impuls, der Masse und der Art des Teilchens ab.

Wir werden die Formen der Propagatoren nicht herleiten, schreiben nur die Resultate nieder.

Innere Linien haben keinen bestimmten Spin- bzw. Polarisationszustand, sondern es wird über alle Möglichkeiten summiert.



$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{---} \xrightarrow{P} \text{---} \\ \mu \text{---} \overset{P}{\text{---}} \nu \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{P} \\ \text{---} \\ \xleftarrow{P} \\ \text{---} \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \delta M = \frac{i}{p^2 - m^2} \\ \delta M = \frac{i}{p^2} \cdot (-\eta_{\mu\nu}) \\ \delta M = \frac{i}{p^2 - m^2} (\not{P} + m) \end{array}$$

Die Klammern enthalten (fast) die Vollständigkeitsrelation!

④ Energie - Impuls - Erhaltung

An jedem Vertex muß der Viererimpuls erhalten bleiben.

⑤ Integration über interne Impulse

Wir haben schon über interne Spin- und Polarisationszustände summiert; es muß auch über interne Impulse integriert werden, und zwar mit dem Integrationsmaß

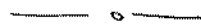
$$\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

⑥ Antisymmetrisierung

Ein Minuszeichen für jede geschlossene Fermion-Schleife.
Ein Minuszeichen in zwischen zweier Diagramme, die sich nur durch den Austausch von zwei externen Fermionlinien unterscheiden.

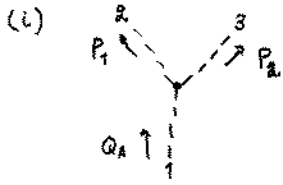
⑦ Gesamtphase

Das Ganze wird üblicherweise noch durch (+i) multipliziert (obwohl dies für $|M|^2$ keine Konsequenzen hat).



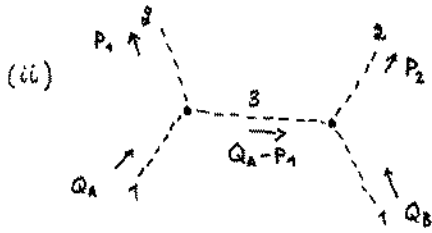
Beispiele

Nehmen wir an, daß es $\hat{\mathcal{L}}_I \equiv -g \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3$ gilt.



$$\mathcal{M} = (-ig) \times (i) = g$$

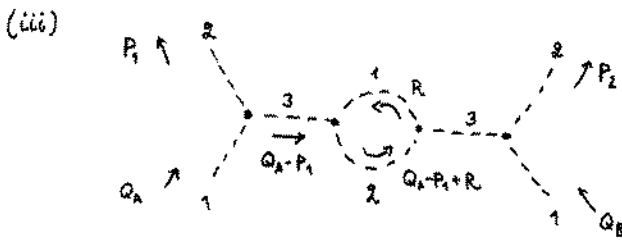
(2)
(7)



$$\mathcal{M} = (-ig)^2 \times \frac{i}{(Q_A - P_1)^2 - m_3^2} \times (i)$$

(2)
(3)
(7)

$$= \frac{g^2}{(Q_A - P_1)^2 - m_3^2}$$



$$\mathcal{M} = (-ig)^4 \left[\frac{i}{(Q_A - P_1)^2 - m_3^2} \right]^2 \int \frac{d^4 R}{(2\pi)^4} \frac{i}{R^2 - m_1^2} \frac{i}{(Q_A - P_1 + R)^2 - m_2^2} \cdot (i)$$

(2)
(3)
(5)
(3)
(7)

$$= ig^4 \frac{1}{[(Q_A - P_1)^2 - m_3^2]^2} \int \frac{d^4 R}{(2\pi)^4} \frac{1}{[R^2 - m_1^2][(Q_A - P_1 + R)^2 - m_2^2]}$$