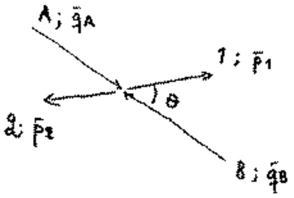
4.4 Zweikörperphasenraumintegration

Versuchen wir jetzt die Phasenraumintegration für Zweikörperstreuung durchzuführen. Wir betrachten wieder das Schwerpunktsystem:



Der Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Phi_2 \, |\mathcal{M}|^2 .$$

Wir schreiben jetzt:

$$d\sigma \equiv \frac{1}{F} \, d\Phi_2 \, |\mathcal{M}|^2 .$$

Von S.40 wissen wir, daß im Schwerpunktsystem Folgendes gilt:

$$F = 4(E_A+E_B)|\vec{q}_A|$$

Damit ist

$$d\sigma = \frac{1}{4(E_A+E_B)|\vec{q}_A|} \cdot \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3\, 2E_1} \, \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3\, 2E_2} \, (2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_A-Q_B) \, |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{q}_A|(E_A+E_B)\, E_1 E_2} \, d^3\vec{p}_1 \, d^3\vec{p}_2 \;\; \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_A-Q_B) .$$

Die Deltafunktion hat die Bedeutung ($\vec{q}_A+\vec{q}_B = 0$!)

$$\delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_A-Q_B) = \delta(E_1+E_2-E_A-E_B) \cdot \delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) ,$$

und wir können deshalb leicht über $\vec{p}_2$ integrieren. Das Resultat bezeichnen wir (nachlässig) immer noch mit $d\sigma$!

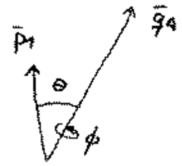
$$\Rightarrow \quad d\sigma = \frac{1}{(8\pi)^2} \, \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{q}_A|(E_A+E_B)} \cdot d^3\vec{p}_1 \cdot \frac{\delta\left(\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}} + \sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}} - E_A - E_B\right)}{\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}}\,\sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}}} .$$

Was für Abhängigkeiten kann $|M|^2$ haben ?

$$|M|^2 = |M|^2\left(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right) = |M|^2\left(\vec{q}_A, -\vec{q}_A, \vec{p}_1, -\vec{p}_1\right)$$

Weiterhin ist $|M|^2$ ein Skalar $\Rightarrow$ könnte von $|\vec{q}_A|^2$, $|\vec{p}_1|^2$ und $\vec{q}_A \cdot \vec{p}_1 = |\vec{q}_A||\vec{p}_1|\cos\theta$ abhängen.
Darum können wir die Winkelintegration <u>nicht</u> ausführen. Wir schreiben

$$d^3\vec{p}_1 = \varrho^2 d\varrho \, d\Omega \quad , \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$



Dadurch bekommen wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{|\vec{q}_A|(E_A+E_B)} \int_0^\infty \varrho^2 d\varrho \; |M|^2 \; \frac{\delta\left(\sqrt{m_1^2+\varrho^2} + \sqrt{m_2^2+\varrho^2} - E_A - E_B\right)}{\sqrt{m_1^2+\varrho^2}\sqrt{m_2^2+\varrho^2}}$$

Wir erinnern uns, daß im Schwerpunktsystem $E_A + E_B = \sqrt{s}$ gilt, wo $s = (Q_A + Q_B)^2$.

Jetzt führen wir eine neue Integrationsvariable ein :

$$E \equiv \sqrt{m_1^2+\varrho^2} + \sqrt{m_2^2+\varrho^2}$$

$$dE = \left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2+\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2+\varrho^2}}\right)\varrho \, d\varrho = \frac{E}{\sqrt{m_1^2+\varrho^2}\sqrt{m_2^2+\varrho^2}} \varrho \, d\varrho$$

$$\frac{dE}{E} = \frac{\varrho \, d\varrho}{\sqrt{m_1^2+\varrho^2}\sqrt{m_2^2+\varrho^2}}$$

Die Inversion :

$$E^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\varrho^2 + 2\sqrt{m_1^2+\varrho^2}\sqrt{m_2^2+\varrho^2}$$

$$\left(E^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2\varrho^2\right)^2 = 4\left(m_1^2+\varrho^2\right)\left(m_2^2+\varrho^2\right)$$

$$E^4 + m_1^4 + m_2^4 + \cancel{4\varrho^4} - 2E^2m_1^2 - 2E^2m_2^2 - 4E^2\varrho^2 + 2m_1^2m_2^2 + \cancel{4m_1^2\varrho^2} + \cancel{4m_2^2\varrho^2}$$
$$= 4m_1^2m_2^2 + \cancel{4m_1^2\varrho^2} + \cancel{4m_2^2\varrho^2} + \cancel{4\varrho^4}$$

$$E^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E^2m_1^2 - 2E^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2 = 4E^2\varrho^2$$

$$\Rightarrow \quad \varrho(E) = \frac{1}{2E}\sqrt{E^4 - 2E^2\left(m_1^2+m_2^2\right) + \left(m_1^2-m_2^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \cdot \frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \cdot \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{dE}{E} \cdot \rho(E) \cdot |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, \rho(E), \cos\theta) \cdot \delta(E - \sqrt{s})$$

Die Deltafunktion wird nur "realisiert", falls $m_1+m_2-\sqrt{s} < 0$.
In diesem Fall wird die Integration aber leicht ausgeführt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \cdot \frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \rho(\sqrt{s}) \; |\mathcal{M}|^2 (|\vec{q}_A|, \rho(\sqrt{s}), \cos\theta)$$

Was ist $\rho(\sqrt{s})$? Wir haben ρ durch $\rho = |\vec{p}_1|$ eingeführt, und $\rho(\sqrt{s})$ stellt jenen Wert von ρ dar, bei dem die Deltafunktion für Energie-Impuls-Erhaltung realisiert wird; also ist $\rho(\sqrt{s})$ gleich $|\vec{p}_1|$ als es durch Energie-Impuls-Erhaltung bestimmt wird.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \cdot \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_A|} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)}{(E_A + E_B)^2}}$$

Es ist bemerkenswert, daß wir in diesem Fall die Phasenraumintegration durchführen konnten, ohne kaum etwas über die explizite funktionelle Form von $|\mathcal{M}|^2$ zu kennen! Im Allgemeinen (das heißt, wenn es drei oder mehr "Körper" im Endzustand sind) wird dies nicht der Fall sein.

<u>Für jede Zweikörperstreuung hätten wir also jetzt eine Vorhersage, wenn wir nur die Amplitude $\mathcal{M}$ kannten! Das heißt, alle "Physik" liegt eigentlich in $\mathcal{M}$ drin!</u> Phasenraum = "nur Kinematik", jedoch natürlich auch sehr wichtig.

— · —

4.5 Weitere Bemerkungen zum Phasenraum

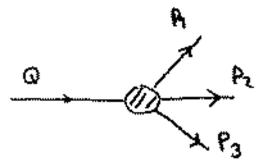
(i) Wir haben die Phasenraumintegration im Schwerpunktsystem ausgeführt, und die Resultat durch Variablen in diesem System, $|\vec{p}_1|, |\vec{q}_A|, E_A, E_B, \cos\theta$, ausgedrückt. Manchmal ist es aber bequemer, Lorentz-Invarianten zu benutzen. Solche sind die Massen m_A, m_B, m_1, m_2 und die Mandelstam-Variablen

$$s = (Q_A + Q_B)^2$$
$$t = (Q_A - P_1)^2$$
$$u = (Q_A - P_2)^2 \, .$$

Eigentlich sind nur zwei von diesen unabhängig (vgl. Übungen). Alle physikalischen Größen können z.B. durch s, t ausgedrückt werden (vgl. Übungen).

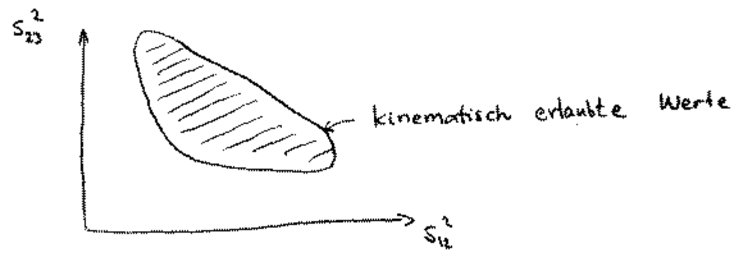
(ii) Falls im Endzustand drei oder mehr Teilchen sich befinden, wird die Kinematik entsprechend komplizierter.

Lorentz-Invarianten:



$$\Rightarrow \quad s_{12}^2 \equiv (P_1 + P_2)^2$$
$$s_{13}^2 \equiv (P_1 + P_3)^2$$
$$s_{23}^2 \equiv (P_2 + P_3)^2$$

Ein "Dalitz-plot" stellt die erlaubte Region dar:



Jeder Punkt entspricht einer bestimmten Geometrie des Endzustandes.

(iii) Ein vollständiger Bericht über Phasenraumintegration kann im Buch "Particle kinematics" von E. Byckling und K. Kajantie gefunden werden.