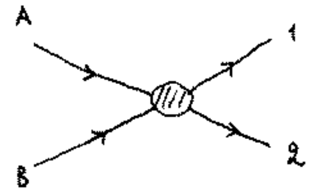
4.2 Die Goldene Regel für Streuung

Betrachten wir nun eine Zweikörperstreuung:



A: $Q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A)$

B: $Q_B = (E_{\vec{q}_B}, \vec{q}_B)$

1: $P_1 = (E_{\vec{p}_1}, \vec{p}_1)$

2: $P_2 = (E_{\vec{p}_2}, \vec{p}_2)$

Wir vermuten jetzt:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V} \quad ; \quad g\hat{V}_I = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{M}\, \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2$$

$$\Rightarrow \quad S_{fi} = -i \left\langle \phi_1(\vec{p}_1)\phi_2(\vec{p}_2) \right| \int dt' d^3\vec{x}\, \mathcal{M}\, \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \left| \phi_A(\vec{q}_A)\phi_B(\vec{q}_B) \right\rangle$$

Wie schon auf S.31:

* einlaufende Teilchen $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{q}}}}\, e^{-iQ\cdot x}$
* auslaufende Teilchen $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}\, e^{+iP\cdot x}$

$$\Rightarrow \quad S_{fi} = -i\,(2\pi)^4\, \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_A-Q_B)\, \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{q}_A}}\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{q}_B}}}$$

$$\Rightarrow \quad |S_{fi}|^2 = (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_A-Q_B) \cdot V \cdot T \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{\left\{ \prod_{i=1,2} (2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_i} \right\} \left\{ \prod_{j=A,B} (2\pi)^3\, 2E_{\vec{q}_j} \right\}}$$

Und wieder:

* Die Teilchen im Anfangszustand waren als ebene Wellen normiert. Wenn wir lieber einzige Teilchen betrachten, müßen wir (zweimal) mit $\frac{V}{(2\pi)^3}$ dividieren! (vgl. S.32)

* Für den totalen Wirkungsquerschnitt müßen wir über den Impulsen $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ integrieren.

* Rate $= \dfrac{|S_{fi}|^2}{T}$.

$\Rightarrow$ die totale Ereignisrate $= \frac{dN_{aus}}{dt}$

$$= \frac{1}{V \cdot 2E_{\vec{q}_A} \cdot 2E_{\vec{q}_B}} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \int \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_A-Q_B) \, |\mathcal{M}|^2 .$$

Wie bekommen wir von hier den Wirkungsquerschnitt ?

- S. 34 $\Rightarrow$ $\frac{dN_{aus}}{dt} \equiv L_{ein} \cdot \sigma$, L_{ein} = Luminosität.

- S. 36 $\Rightarrow$ Im Koordinatensystem, wo B ruht :

  * $E_{\vec{q}_B} = m_B$

  * $L_{ein} = \frac{1}{V} \cdot |\vec{v}_A|$

Dadurch erhalten wir in diesem Koordinatensystem :

$$\sigma = \frac{\frac{dN_{aus}}{dt}}{L_{ein}}$$

$$= \frac{1}{4|\vec{v}_A| E_{\vec{q}_A} m_B} \cdot \int d\Phi_2 \, |\mathcal{M}|^2 ,$$

wo $\int d\Phi_n \equiv \int \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n} P_j - Q_A - Q_B \right)$.

Wir nennen $F \equiv 4|\vec{v}_A| E_{\vec{q}_A} m_B$ den Flußfaktor, und schreiben die Goldene Regel für Streuung einfach als

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{F} \int d\Phi_2 \, |\mathcal{M}|^2 .}$$

Der differentielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ folgt durch Weglassung einiger Integrationen in $\int d\Phi_2$.

4.3 Flußfaktor

Der Wirkungsquerschnitt ist eine physikalische Größe, und muß deshalb Lorentz-invariant sein. Weil $\int d\Phi_2$ alleine invariant ist (vgl. Aufgabe 5.2) und dasselbe auch für $|\mathcal{M}|^2$ gilt, muß es möglich sein, den Flußfaktor $F = 4|\vec{v}_A| E_{\vec{q}_A} m_B$ in einer Lorentz-invarianten Form zu schreiben.

Behauptung: $F = 4\sqrt{(Q_A \cdot Q_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$.

Beweis:

$$Q_B = (m_B, 0)$$
$$Q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A)$$

$$Q_A \cdot Q_B = E_{\vec{q}_A} \cdot m_B$$
$$(Q_A \cdot Q_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = (E_{\vec{q}_A}^2 - m_A^2) m_B^2 = |\vec{q}_A|^2 m_B^2$$

$$\Rightarrow F = 4|\vec{q}_A| m_B = 4 \cdot \frac{|\vec{q}_A|}{E_{\vec{q}_A}} \cdot E_{\vec{q}_A} \cdot m_B = 4 \cdot |\vec{v}_A| E_{\vec{q}_A} \cdot m_B \qquad \square .$$

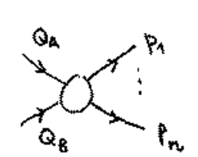
Dadurch können wir die endgültige Form der Goldenen Regel niederschreiben:

$$\sigma = \frac{1}{F} \int d\Phi_n \, |\mathcal{M}|^2$$

$$F = 4\sqrt{(Q_A \cdot Q_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$$

$$d\Phi_n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 \, 2E_{\vec{p}_i}} \right\} (2\pi)^4 \, \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n} P_j - Q_A - Q_B \right)$$

$\mathcal{M}$ = Amplitude

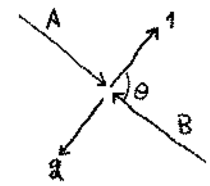


Der Flußfaktor kann auf verschiedenen Weisen geschrieben werden, wie wir schon gesehen haben. Nennen wir noch zwei weitere Formen:

- Eine wichtige kinematische Invariante wird definiert durch

$$s \equiv (Q_A + Q_B)^2 .$$

Im Schwerpunktsystem, $\vec{q}_A = -\vec{q}_B$!



$$\Rightarrow Q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A) \; , \; Q_B = (E_{\vec{q}_B}, -\vec{q}_A)$$

$$\Rightarrow Q_A + Q_B = (E_A + E_B, \vec{0}) \quad ; \quad E_A \equiv E_{\vec{q}_A}, \; E_B \equiv E_{\vec{q}_B}$$

$$\Rightarrow s = (E_A + E_B)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = E_A + E_B = \text{die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem.}$$

Mit Hilfe von s:

$$F = 2\sqrt{4(Q_A \cdot Q_B)^2 - 4m_A^2 m_B^2} \quad ;$$

$$4(Q_A \cdot Q_B)^2 = (2Q_A \cdot Q_B)^2 = \left[(Q_A+Q_B)^2 - Q_A^2 - Q_B^2\right]^2 = (s - m_A^2 - m_B^2)^2 \quad !$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F = 2\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}}}$$

- Im Schwerpunktsystem:

$$Q_A \cdot Q_B = E_A E_B + |\vec{q}_A|^2$$

$$(Q_A \cdot Q_B)^2 = E_A^2 E_B^2 + |\vec{q}_A|^4 + 2E_A E_B |\vec{q}_A|^2$$

$$(Q_A \cdot Q_B)^2 - m_A^2 m_B^2 \underset{\substack{E_A^2 = m_A^2 + |\vec{q}_A|^2 \\ E_B^2 = m_B^2 + |\vec{q}_A|^2}}{=} 2|\vec{q}_A|^4 + |\vec{q}_A|^2 (m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B)$$

$$= |\vec{q}_A|^2 \left\{ |\vec{q}_A|^2 + |\vec{q}_A|^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B \right\}$$

$$= |\vec{q}_A|^2 (E_A + E_B)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F = 4(E_A + E_B)|\vec{q}_A|}} .$$