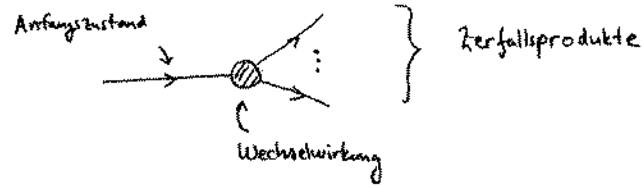
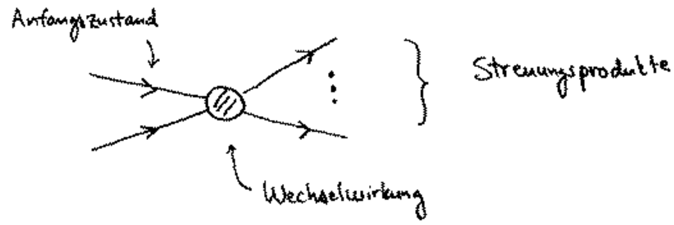
3. Zerfälle

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, wie freie relativistische Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ (und Polarisation λ / Helizität s) beschrieben werden können. Jetzt führen wir Wechselwirkungen ein. Dies führt zu zwei Arten von Prozessen:

Zerfälle



Streuung



In diesem Kapitel betrachten wir Zerfälle, im nächsten Streuung.

Grundbegriffe für Zerfälle:

- die Lebensdauer τ
  - * (normalerweise) für ein ruhendes Teilchen
  - * gemeint wird der Durchschnitt (für ein bestimmtes Teilchen bekommen wir keine Vorhersage)
- die Zerfallsrate Γ
  - * die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, daß ein Teilchen zerfallen wird:

$$dN = -\Gamma N \, dt$$

$$\Rightarrow N(t) = N(0)\, e^{-\Gamma t}$$

Es kann gezeigt werden (Aufgabe 5.1), daß $\Gamma = \frac{1}{\tau}$ gilt!

- der Zerfallskanal i
  - * die Art der Zerfallsprodukte
  - * die Zerfallsrate zu diesem Kanal: Γ_i.
- die Gesamtzerfallsrate $\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i$.
- das Verzweigungsverhältnis für den i-ten Zerfallskanal $= \dfrac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}$.
  - * Je größer das Verzweigungsverhältnis, desto mehr Zerfälle zu diesem Kanal.

Wie berechnen wir die Zerfallsrate?

Der Ausgangspunkt ist die Zeitabhängige Störungstheorie in der Wechselwirkungsdarstellung (S.12):

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{freie Teilchen}} + \underbrace{g\hat{V}}_{\text{Wechselwirkungen}}$$

Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t,t_0)$:

$$|\Psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle_I \,.$$

Aufgabe 2.3(b) :

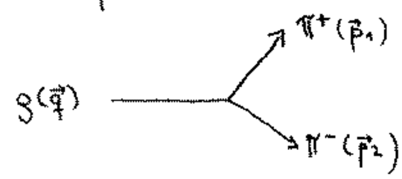
$$\hat{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - ig\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{V}_I(t') + O(g^2) \,.$$

Nun definieren wir eine Streumatrix S :

$$S_{fi} \equiv \underbrace{{}_I\langle f|}_{\text{Endzustand}}\,\hat{U}_I(+\infty,-\infty)\,\underbrace{|i\rangle_I}_{\text{Anfangszustand}} \,.$$

Nichtdiagonale Elemente von S sind nur für $g \neq 0$ ungleich Null!

Betrachten wir ein Beispiel:



$$\begin{aligned}
\rho:&\quad Q \equiv (E_{\vec q}, \vec q)\,, \quad E_{\vec q} \equiv \sqrt{m_\rho^2 + \vec q^{\,2}}\\
\pi^+:&\quad P_1 \equiv (E_{\vec p_1}, \vec p_1)\,, \quad E_{\vec p_1} \equiv \sqrt{m_\pi^2 + \vec p_1^{\,2}}\\
\pi^-:&\quad P_2 \equiv (E_{\vec p_2}, \vec p_2)\,, \quad E_{\vec p_2} \equiv \sqrt{m_\pi^2 + \vec p_2^{\,2}}
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß die Wechselwirkung die folgende Form[1] hat:

$$g\hat{V}_I(t') \equiv \int d^3\vec{x}\ \underbrace{\mathcal{M}}_{\text{eine Konstante}}\ \hat{\phi}^{\dagger}(\vec{x},t')\,\hat{\phi}(\vec{x},t')\,\hat{\rho}(\vec{x},t') \,.$$

---

[1] Das physikalische ρ ist ein Spin-1 Teilchen, nicht Spin-0 wie diese Form suggeriert aber dieser Unterschied ist momentan für uns nicht zu wichtig.

Das nicht-triviale S-Matrixelement erster Ordnung wird damit

$$S_{fi} = -i \langle \pi^+(\vec{p}_1)\, \pi^-(\vec{p}_2) \,|\, \int dt' \int d^3\vec{x}\ \mathcal{M}\, \hat{\phi}^+ \hat{\phi}\, \hat{\varrho}\ \,|\, \varrho(\vec{q}) \rangle$$

Hier:

$$\hat{\phi}(\vec{x},t') = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_1}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}_1} e^{-iP_1\cdot x} + \hat{b}^+_{\vec{p}_1} e^{iP_1\cdot x} \right]$$

erzeugt Antiteilchen; auslaufendes π^+

$$\hat{\phi}^+(\vec{x},t') = \int \frac{d^3\vec{p}_2}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}_2}}} \left[\hat{a}^+_{\vec{p}_2} e^{iP_2\cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}_2} e^{-iP_2\cdot x} \right]$$

erzeugt Teilchen; auslaufendes π^-

$$\hat{\varrho}(\vec{x},t') = \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{q}}}} \left[\hat{a}_{\vec{q}} e^{-iQ\cdot x} + \hat{a}^+_{\vec{q}} e^{iQ\cdot x} \right]$$

vernichtet Teilchen; einlaufendes ϱ

$$\Rightarrow \quad S_{fi} = -i \int dt' \int d^3\vec{x}\ \mathcal{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{q}}}} \cdot e^{i(P_1+P_2-Q)\cdot x}$$

$$= -i\, (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(P_1+P_2-Q) \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}}\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{q}}}}}_{\equiv \text{ Transfermatrixelement } T_{fi}}$$

$\mathcal{M} \equiv$ Amplitude

Energie-Impuls-Erhaltung kommt automatisch heraus!

Wahrscheinlichkeit :

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-Q)\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)\ \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_1}\ (2\pi)^3 2E_{\vec p_2}\ (2\pi)^3 2E_{\vec q}}$$

Aufgabe 3.5 : $\delta^{(3)}(\vec 0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$, V = das Volumen

$\Rightarrow \quad \delta^{(4)}(0) = \frac{V\cdot T}{(2\pi)^4}$, $V\cdot T$ = das Viervolumen

Zerfallsrate $\Gamma = \frac{|S_{fi}|^2}{T}$. Wir sollen auch über allen möglichen Impulsen der auslaufenden Teilchen integrieren .

$$\Rightarrow \Gamma = \int d^3\vec p_1 \int d^3 \vec p_2\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-Q)\ \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_{\vec q}\cdot (2\pi)^3 2E_{\vec p_1}\ (2\pi)^3 2E_{\vec p_2}} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3}$$

Es gibt aber ein Problem noch : der Anfangszustand war eine ebene Welle , die überall im Raum ausgebreitet ist . Seine Normierung war eben $\langle \rho | \rho \rangle = \delta^{(3)}(\vec 0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$. Wenn wir also ein einziges Teilchen

└ Aufgabe 3.3 └ Aufgabe 3.5

betrachten wollen , normiert als $\langle \rho|\rho\rangle = 1$, müßen wir mit $\frac{V}{(2\pi)^3}$ dividieren!

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{\rho\to\pi^+\pi^-} = \frac{1}{2E_{\vec q}} \int \frac{d^3\vec p_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_1}} \int \frac{d^3\vec p_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_2}} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-Q)\ |\mathcal{M}|^2}$$

"Fermis Goldene Regel" (für Zerfälle) .

Für n-Teilchen-Zerfall :

$$\Gamma_{\rho\to 12\ldots n} = \frac{1}{2E_{\vec q}} \cdot C \cdot \int d\Phi_n \cdot |\mathcal{M}|^2 \quad ;$$

$$\int d\Phi_n \equiv \text{"Phasenraumintegration"} \equiv \int \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\vec p_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_i}} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i - Q\Big)$$

$C \equiv$ "ein statistischer Faktor" $= \frac{1}{j!}$ für j identische Teilchen.

Es bleibt übrig, "nur" die Phasenraumintegrationen durchzuführen ! (Aufgabe 5.3)

——— o ———