

Normierung

25

Wie die Konstanten G, G' gewählt werden, ist mit einigen anderen Konventionen (wie die Vollständigkeitsrelation und die Formel der zweiten Quantisierung weiter unten) zusammengebunden.

Wir definieren einen hermitesch-konjugierten Spinor durch

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \Rightarrow u^\dagger \equiv (u^* \ \beta^* \ \gamma^* \ \delta^*) ,$$

und einen Dirac-adjungierten Spinor durch

$$\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 .$$

Es zeigt sich als nützlich, jetzt Folgendes zu verlangen:

$$\bar{u}(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = 2m \cdot \delta_{ss'}$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = -2m \cdot \delta_{ss'}$$

$$\bar{u}v = \bar{v}u = 0 .$$

Von hier folgt (Aufgabe 4.3): $C = -C' = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}}$, $u^\dagger u = v^\dagger v = 2E_{\vec{p}} \cdot \delta_{ss'}$.

Vollständigkeitsrelation

Wie schon mit den Polarisationszuständen von Photonen, werden wir später einen Ausdruck für die Summe über den verschiedenen Spinzuständen brauchen:

$$u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, s) = C^2 (p^0 + m) \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha (\xi_s^\dagger \ 0)_\lambda (p^0 \gamma^0 + m)_{\lambda\beta} \gamma_{\beta\alpha}^0$$

$$\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha (\xi_s^\dagger \ 0)_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha (1 \ 0 \ 0 \ 0)_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\lambda}$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha (\xi_s^\dagger \ 0)_\lambda = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_s u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, s) = \frac{1}{p^0 + m} \left[(p^0 + m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 (p^0 + m) \right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{p^0 + m} \left[\begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -p^0 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -p^0 + m \end{pmatrix} \right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{p^0 + m} \left[\begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -p^0 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{p^0 + m} \begin{pmatrix} (p^0 + m)^2 & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \times (p^0 + m) \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \times (p^0 + m) & -\vec{p}^2 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

$$\left. \begin{aligned} p_0^2 &= \vec{p}^2 + m^2 \\ -\vec{p}^2 &= m^2 - p_0^2 \\ &= (m - p_0)(m + p_0) \end{aligned} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -p^0 + m \end{pmatrix}_{\alpha\beta} = (p^0 + m)_{\alpha\beta} !$$

Gleicherweise $\sum_s v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, s) = (p^0 - m)_{\alpha\beta} !$

Physikalische Interpretation

Die physikalische Interpretation der Lösung als Teilchen/Antiteilchenzustände kann wieder nur durch eine "zweite Quantisierung" gefunden werden. Eine ordentliche "Herleitung" folgt in der Vorlesung über Quantenfeldtheorie; hier erwähnen wir nur die wichtigsten Ergebnisse.

Feldoperatoren:

$$\hat{\Psi} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} u(\vec{p},s) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} v(\vec{p},s) e^{+ip \cdot x} \right]$$

$$\hat{\bar{\Psi}} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \bar{u}(\vec{p},s) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \bar{v}(\vec{p},s) e^{-ip \cdot x} \right]$$

Vertauschungsrelationen:

$$\{ \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{+(s')} \} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{ss'} = \{ \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{b}_{\vec{p}'}^{+(s')} \}$$

$$\{ \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(s')} \} = \dots = 0$$

Die Objekte hier sind Antikommutatoren: dies führt zu Fermi-Dirac Statistik und ist eine Manifestation des Spin-Statistik-Theorems!

Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\vec{p} E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} - \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \right] \\ &= \int d^3\vec{p} E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} - \delta^{(3)}(\vec{0}) \right] \quad (\text{vgl. S. 20!}) \end{aligned}$$

Erhaltene Ladung:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \int d^3\vec{x} \hat{\Psi} \gamma_0 \hat{\Psi} \\ &= \int d^3\vec{p} \sum_{s=\pm 1} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} - \hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \right] \end{aligned}$$

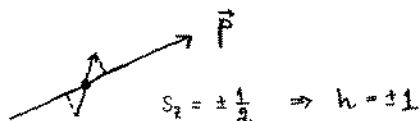
Interpretation:

- $\hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} \longleftrightarrow$ einlaufendes Teilchen
- $\hat{a}_{\vec{p}}^{+(s)} \longleftrightarrow$ auslaufendes Teilchen
- $\hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \longleftrightarrow$ einlaufendes Antiteilchen
- $\hat{b}_{\vec{p}}^{+(s)} \longleftrightarrow$ auslaufendes Antiteilchen

2.8 Helizität

"physikalisch einfach, mathematisch kompliziert"

Helizität eines Dirac-Feldes entspricht der Polarisation eines Photons: es handelt sich um die Komponente des inneren Spins entlang der Bewegungsrichtung, mal zwei.



Mathematisch:

* Bewegungsrichtung : $\hat{e}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

* Helizität: $h(\vec{p}) \equiv \hat{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$,
 $\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

* Spin entlang $\hat{e}_{\vec{p}}$: $s_{\hat{e}_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} h(\vec{p})$

Es kann gezeigt werden: (Aufgabe 4.4)

• $h^2(p) = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte sind ± 1

• $P_{\pm}^{(h)} = \frac{1 \pm h}{2}$ sind "Projektoren":

$$(P_{\pm}^{(h)})^2 = P_{\pm}^{(h)}, P_{+}^{(h)} P_{-}^{(h)} = 0, P_{+}^{(h)} + P_{-}^{(h)} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \text{jeder Zustand kann als } u = (P_{+}^{(h)} + P_{-}^{(h)}) u \equiv u_{+}^{(h)} + u_{-}^{(h)}$$

geschrieben werden.

Beispiel:

Nehmen wir an, daß $\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|)$ gilt.

$$\Rightarrow h(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$u(\vec{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} + m & 0 & -|\vec{p}| & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} + m & 0 & |\vec{p}| \\ |\vec{p}| & 0 & -E_{\vec{p}} + m & 0 \\ 0 & -|\vec{p}| & 0 & -E_{\vec{p}} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} + m} \xi_s \\ \frac{s|\vec{p}|}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \xi_s \end{pmatrix}$$

$$h(\vec{p}) u(\vec{p}, s) = s u(\vec{p}, s)$$

\Rightarrow Der Helizitätseigenwert ist gleich s !

2.9 Chiralität

28

"mathematisch einfach, physikalisch kompliziert"

* Chiralitätsoperator: $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$.

Es kann gezeigt werden: (Aufgabe 4.4)

• $\gamma_5^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte sind ± 1 .

• $P_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}$, $P_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}$ sind "Projektoren":

$$P_L^2 = P_L, P_R^2 = P_R, P_L P_R = 0, P_L + P_R = \mathbb{1}.$$

"L" steht für "linkshändig", "R" für "rechtshändig".

$$\Rightarrow \text{jeder Zustand kann als } u = (P_L + P_R)u \\ \equiv u_L + u_R$$

geschrieben werden.

Physikalisch:

* Wie es sich später zeigen wird, wirken schwache Wechselwirkungen nur auf Teilchen, die linkshändig sind, also mit P_L projiziert!

* Für masselose Teilchen sind Helizität und Chiralität miteinander verbunden. Beispiel: (vgl. S. 27)

$$\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|), m = 0$$

$$\Rightarrow u(\vec{p}, s) = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s \xi_s \end{pmatrix}, s = \pm 1$$

$$\Rightarrow \gamma_5 u(\vec{p}, s) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s \xi_s \end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} s \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = s u(\vec{p}, s)$$

\Rightarrow Der Chiralitätseigenwert ist gleich s !

* Insbesondere:

Neutrinos werden nur in schwachen Wechselwirkungen erzeugt.

\Rightarrow Sie sind linkshändig $\Rightarrow s = -1$ (Aufgabe 4.4) (weil $m \approx 0$)

\Rightarrow

