2.6 Lösung der Maxwell-Gleichungen

Klein-Gordon: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(\vec{x},t) = 0 \quad , \quad \phi \in \mathbb{C} \quad (\pi^\pm)$

$$\Rightarrow \quad \hat{\phi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+ip\cdot x} \right], \qquad \begin{aligned} &p = (E_{\vec{p}}, \vec{p}) \\ &E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \\ &[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \, . \end{aligned}$$

Maxwell-Gleichungen in der Coulomb-Eichung:

$$\begin{cases} (\partial_\mu \partial^\mu)\, A^\nu(\vec{x},t) = 0 \, , & A^\nu \in \mathbb{R} \, , \ \nu = 0,1,2,3 \\ A^0(\vec{x},t) = 0 \, , & \\ \partial_i A^i(\vec{x},t) = 0 \, . & \end{cases}$$

Die Lösung folgt von der Lösung der Klein-Gordon Gleichung mit kleinen Änderungen:

- Die Funktionen $A^\nu(\vec{x},t)$ sind reell $\Rightarrow$ $\hat{A}^\nu(\vec{x},t)$ hermitesch $\Rightarrow$ $\hat{a}_{\vec{p}} = \hat{b}_{\vec{p}}$!
- Es gibt im Allgemeinen 4 verschiedene Funktionen ($\nu = 0,1,2,3$). Wir führen deshalb einen Polarisationsvektor $\varepsilon^\nu_{(\lambda)}(\vec{p})$ ein.

$$\Rightarrow \quad \hat{A}^\nu(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \sum_\lambda \varepsilon^\nu_{(\lambda)}(\vec{p}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger(\lambda)}_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right] .$$

Der Index (λ) kennzeichnet Polarisationszustände. Es folgt:

$$A^0(\vec{x},t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^0_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$$

$$\partial_i A^i(\vec{x},t) = 0 \quad ; \quad \partial_i\, e^{-ip\cdot x} = \partial_i\, e^{-ip_\mu x^\mu} = -ip_i$$

$$\Rightarrow \quad p_i\, \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0 \, .$$

Das heißt, der Dreiervektor $\vec{\varepsilon}$ ist senkrecht auf der Bewegungsrichtung, festgestellt durch den Impuls $\vec{p}$.

Wir sagen, daß ein freies Photon transversal polarisiert ist.

Suchen wir nach den unabhängigen Lösungen von $\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}_{(\lambda)} = 0$.
Wenn z.B. $\vec{p}$ in die z-Richtung zeigt, dann gibt es zwei Lösungen,

$$\vec{\varepsilon}_{(1)} = (1,0,0) \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_{(2)} = (0,1,0).$$

Lineare Kombinationen davon gelten auch als mögliche Basisvektoren;
So können Zustände mit rechts- und links-zirkularer Polarisation definiert werden.

Vollständigkeitsrelation

Es wird später wichtig sein, es zu wissen, was

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(\vec{p})\,\varepsilon^{\nu}_{(\lambda)}(\vec{p})$$

beträgt. Diese Summe über alle Polarisationszustände wird die Vollständigkeitrelation benannt. In Coulomb-Eichung (Aufgabe 4.1),

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{i}_{(\lambda)}(\vec{p})\,\varepsilon^{j}_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2}.$$

Physikalische Interpretation

- Das Photon hat keinen $\hat{b}$-Operator (weil $A^\mu \in \mathbb{R}$)

  $\Longrightarrow$ es gibt keine Antiphotonen!

- $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$; daß heißt, ein solches Teilchen muß im Anfangszustand vorhanden sein; dadurch repräsentiert $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ ein einlaufendes Teilchen.

- $\hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}}$ ... repräsentiert ein auslaufendes Teilchen

- Der Vektor $\varepsilon^{\nu}_{(\lambda)}(\vec{p})$, $\lambda = 1,2$, bestimmt den entsprechenden Polarisationszustand.

— ∘ —

2.7 Lösung der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\Psi(\vec{x},t) = 0\,, \qquad \Psi(\vec{x},t) \in \mathbb{C}^4$$

Wir suchen wieder nach Lösungen in Form von ebenen Wellen:

$$\Psi(\vec{x},t) \propto u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}\,,$$

wo der Spinor $u(\vec{p})$ ortsunabhängig ist, und die Rolle des Polarisationsvektors $\varepsilon^\mu(\vec{p})$ im Falle der Maxwell-Gleichung spielt.
Weil $i\partial_\mu e^{-ip\cdot x} = p_\mu e^{-ip x}$ ist, bekommen wir die Gleichung

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)\,u(\vec{p}) \equiv (\not{p} - m)\,u(\vec{p}) = 0\,.}$$

(hier $\sigma^k \equiv \sigma_k$ von S. 15!)

In der Standard-Darstellung $\left[\ \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1}\end{pmatrix},\ \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}\ \right]$:

$$\begin{bmatrix} (p^0 - m)\,\mathbb{1} & -p^k\sigma^k \\ p^k\sigma^k & (-p^0 - m)\,\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \text{wobei } p^k\sigma^k \equiv \sum_{k=1}^{3} p^k\sigma^k \equiv \vec{p}\cdot\vec{\sigma}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (p^0-m)u_A - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_B \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_A - (p^0+m)u_B \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_A = \frac{1}{p^0-m}\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_B \quad \& \quad u_B = \frac{1}{p^0+m}\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_A$$

$$\Longrightarrow \quad u_A = \frac{1}{(p^0)^2 - m^2}\, p^k\sigma^k p^l\sigma^l\, u_A$$

Nun: $\quad p^k\sigma^k p^l\sigma^l = p^k p^l \cdot (\delta^{kl}\,\mathbb{1} + i\varepsilon^{klm}\sigma^m) = \vec{p}^{\,2}\cdot\mathbb{1}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\vec{p}^{\,2}}{(p^0)^2 - m^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (p^0)^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \quad \Rightarrow \quad p^0 = \pm E_{\vec{p}}\ !$$

* Also wie schon mit der Klein-Gordon-Gleichung, gibt es wieder zwei Arten von Lösungen, eine mit "positiver Energie" und die andere mit "negativer Energie."

* Für beide Lösungen gilt $(p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2 = 0$, also die relativistische Energieimpulsbeziehung.

Fangen wir jetzt mit diesen Kenntnissen neu an!

* Die Lösung "positiver Energie" wird als $u(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x}$ geschrieben, und muß $(\not{p}-m)\,u(\vec{p})=0$ erfüllen. Wegen der Tatsache

$$(\not{p}-m)(\not{p}+m) = p^2-m^2 = 0\,,$$

können wir annehmen, daß es gilt:

$$u(\vec{p}) \equiv (\not{p}+m)\cdot C\cdot u_0\,,$$

wo der Spinor u_0 unabhängig von $\vec{p}$ ist, und $C\in\mathbb{R}$.
Die zwei unabhängigen Spinzustände werden als $u_0\equiv\begin{pmatrix}\xi_\pm\\0\end{pmatrix}$ gewählt, wobei

$$\xi_+\equiv\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\quad \xi_-\equiv\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir $s\equiv\pm$, hat die ganze Lösung dann die Form

$$u(\vec{p},s)\equiv C\cdot(\not{p}+m)\cdot\begin{pmatrix}\xi_s\\0\end{pmatrix}.$$

* Die Lösung "negativer Energie" wird als $v(\vec{p})\,e^{+ip\cdot x}$ geschrieben, wo jetzt $p^0\equiv+E_{\vec{p}}=+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$. Diese Lösung muß die Gleichung

$$(\not{p}+m)\,v(\vec{p}) = 0$$

erfüllen, weswegen wir annehmen können, daß es gilt:

$$v(\vec{p})\equiv(\not{p}-m)\,C'\,v_0\,,\qquad C'\in\mathbb{R}.$$

Jetzt werden die zwei unabhängigen Spinzustände als $v_0\equiv\begin{pmatrix}0\\\xi_\mp\end{pmatrix}$ gewählt, so daß

$$v(\vec{p},s)\equiv C'\,(\not{p}-m)\cdot\begin{pmatrix}0\\\xi_{-s}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Im Ruhe $(\vec{p}=0,\ p^0=p_0=m)$ gilt:

$$u(\vec{0},s) = C\cdot\begin{pmatrix}\overset{2m}{(p_0+m)}\mathbb{1} & \\ & \underset{0}{(-p_0+m)}\mathbb{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_s\\0\end{pmatrix} = C\cdot 2m\cdot\begin{pmatrix}\xi_s\\0\end{pmatrix}$$

$$v(\vec{0},s) = C'\cdot\begin{pmatrix}\overset{0}{(p_0-m)}\mathbb{1} & \\ & \underset{-2m}{(-p_0-m)}\mathbb{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\xi_{-s}\end{pmatrix} = -C'\cdot 2m\cdot\begin{pmatrix}0\\\xi_{-s}\end{pmatrix}.$$

Von hier aus ist es verständlich, warum wir ξ_s in die zwei oberen Komponente im Falle von $u(\vec{p},s)$ gesetzt haben, in die zwei unteren im Falle von $v(\vec{p},s)$. Die Vektoren u,v sind auch orthogonal, $u^\dagger v=v^\dagger u=0$.