## 2.4 Lösung der Klein-Gordon-Gleichung



Normalerweise wird ein Spin-0 Teilchen mit $\phi$ statt $\Psi$ bezeichnet, und dadurch haben wir die Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi = 0 .$$

Hier konnte $\phi$ reell oder komplex sein.

Suchen wir nun nach einer Lösung mit einem Ansatz einer <u>ebenen Welle</u>:

$$\phi(x) = N \cdot e^{-ik\cdot x} = N e^{-ik_\mu x^\mu} = N e^{-ik^\mu x_\mu}$$

$$\Rightarrow \left(-k_\mu k^\mu + m^2\right) N = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} .$$

Eine allgemeine Lösung ist eine Linearkombination ebener Wellen, mit beliebigen Koeffizienten. Bezeichnen wir

$$E_{\vec{k}} \equiv +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} ,$$

ist also

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3\vec{k} \left[ N_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + N_-(\vec{k})\, e^{+iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

$\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Teil

$$= \int d^3\vec{k} \left[ N_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + N_-(-\vec{k})\, e^{iE_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

Jetzt führen wir die folgenden Konventionen ein:

* $\vec{k} \to \vec{p}$ , $E_{\vec{k}} \to p^0 \equiv E_{\vec{p}}$ ; $p\cdot p = m^2$
  $E_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x} \to p\cdot x$
* $N_+(\vec{k}) \to \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\, a_{\vec{p}}$
* $N_-(-\vec{k}) \to \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\, b^*_{\vec{p}}$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \left[ a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + b^*_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right] .$$

Falls $\phi \in \mathbb{C}$ [$\hat{=}$ zwei Freiheitsgrade, z.B. $\pi^\pm$], sind $a_{\vec{p}}, b^*_{\vec{p}}$ unabhängig voneinander; falls $\phi \in \mathbb{R}$ [$\hat{=}$ ein Freiheitsgrad, z.B. $\pi^0$], muß $b_{\vec{p}} \equiv a_{\vec{p}}$ sein!

Frage: Wie finden wir jetzt aus dieser allgemeinen Lösung den speziellen Fall, der ein <u>einziges Teilchen</u> mit Masse $m$ und Impuls $\vec{p}_0$ beschreibt?

Versuche:

$$a_{\vec{p}} \propto \delta(\vec{p}-\vec{p}_0) \quad , \quad \phi(\vec{x},t) \propto e^{-iE_{\vec{p}_0}t + i\vec{p}_0\cdot\vec{x}}$$

$$b_{\vec{p}} \propto \delta(\vec{p}-\vec{p}_0) \quad , \quad \phi(\vec{x},t) \propto e^{+iE_{\vec{p}_0}t - i\vec{p}_0\cdot\vec{x}}$$

Ein Teilchen mit negativer Energie?
Dann wäre die Welt aber nicht stabil!
Man könnte immer die Energie reduzieren, durch die Erzeugung von neuen Teilchen.
Dies hat historisch für sehr viel Verwirrung gesorgt.

$\Longrightarrow$ Wir müßen uns aber daran erinnern, daß als eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung $e^{-ip\cdot x}$ ebenso gut wie $e^{+ip\cdot x}$ ist: das Problem entsteht erst, wenn wir eine <u>Teilcheninterpretation</u> zu einer Wellenfunktion geben wollen.

$\Longrightarrow$ Es gibt in der Tat eine andere Interpretation, die eigentlich keine Probleme hat: [Stückelberg, Feynman]

$$e^{+iEt} = e^{-iE(-t)}$$

= ein Teilchen mit $E > 0$, das aber rückwärts in Zeit propagiert
$\equiv$ ein Antiteilchen, das vorwärts propagiert!

Graphisch:

$\longrightarrow t$

$\longrightarrow$ $\equiv$ Teilchen

$\longleftarrow$ $\equiv$ Antiteilchen !

$\Longrightarrow$ Um jedoch weg von dieser Willkür verschiedener Interpretationen zu kommen, brauchen wir

"Zweite Quantisierung"
$\equiv$ Quantenfeldtheorie
$\equiv$ das Feld $\phi(\vec{x},t) \Longrightarrow$ ein Operator $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ !

## 2.5 Die zweite Quantisierung



Klassische Mechanik : $p = m\dot{x} \overset{m=1}{=} \dot{x}$

$\Rightarrow$ Quantenmechanik : $[\hat{x}, \hat{p}] = i$

$\Rightarrow$ Quantenfeldtheorie: $\underline{[\hat{\phi}(\vec{x},t), \partial_0 \hat{\phi}^+(\vec{y},t)] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})}$ . $\quad (*)$

Behauptung: Führen wir die Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^+_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^+_{\vec{p}}$ ein, mit den Eigenschaften (wie für den harmonischen Oszillator)

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^+_{\vec{p}'}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^+_{\vec{p}'}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = \ldots = 0 \,,$$

und schreiben

$$\hat{\phi} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \left[ \hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^+_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right]$$
$$\hat{\phi}^+ \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}} \left[ \hat{a}^+_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} \right],$$

dann wird $(*)$ erfüllt sein.

Beweis:

$$\partial_0 \hat{\phi}^+(y) = \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{q}}}} \cdot iE_{\vec{q}} \left[ \hat{a}^+_{\vec{q}}\, e^{iq\cdot y} - \hat{b}_{\vec{q}}\, e^{-iq\cdot y} \right]$$

$$[\hat{\phi}(x), \partial_0\hat{\phi}^+(y)] = \int_{\vec{p},\vec{q}} \Big\{ \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^+_{\vec{q}}]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})} e^{iq\cdot y - ip\cdot x} - \underbrace{[\hat{b}^+_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}]}_{-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})} e^{ip\cdot x - iq\cdot y} \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{iE_{\vec{p}}}{2E_{\vec{p}}} \left\{ e^{iE_{\vec{p}}(y_0-x_0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} + e^{iE_{\vec{p}}(x_0-y_0) - i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right\}$$

$$\overset{x_0=y_0}{=} i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \,.$$

$\Rightarrow$ Wenn wir also in der klassischen Lösung $a_{\vec{p}}, a^*_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}, b^*_{\vec{p}}$ mit den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^+_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^+_{\vec{p}}$ ersetzen, dann bekommen wir die quantenfeldtheoretische Lösung.

# Physikalische Interpretation

Betrachten wir zwei "physikalische" Operatoren.

* Es kann gezeigt werden, daß $\hat{Q} \equiv i\int d^3\vec{x}\, \{ \hat{\phi}^{+}\partial_0\hat{\phi} - \hat{\phi}\partial_0\hat{\phi}^{+} \}$ durch die Klein-Gordon-Gleichung erhalten bleibt (Aufgabe 3.1).
  Setzen wir hier die Ausdrücke von $\hat{\phi}, \hat{\phi}^{+}$ ein, finden wir (Aufgabe 3.2)

$$\hat{Q} = \int d^3\vec{p}\, \left\{ \tfrac{1}{2}\left( \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^{+}_{\vec{p}} \right) - \tfrac{1}{2}\left( \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^{+}_{\vec{p}} + \hat{b}^{+}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} \right) \right\}$$

$$= \int d^3\vec{p}\, \{ \underbrace{\hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}}_{} - \underbrace{\hat{b}^{+}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}}_{} \} \sim N(\pi^{+}) - N(\pi^{-}) \sim \text{Ladung}.$$

Besetzungszahloperatoren

* Es kann gezeigt werden, daß der Hamilton-Operator ist

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x}\, \left\{ \partial_0\hat{\phi}\,\partial_0\hat{\phi}^{+} + \vec{\nabla}\hat{\phi}^{+}\cdot\vec{\nabla}\hat{\phi} + m^2\hat{\phi}^{+}\hat{\phi} \right\}.$$

Setzen wir hier die Ausdrücke von $\hat{\phi}, \hat{\phi}^{+}$ ein, finden wir (Aufgabe 3.4)

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \left\{ \tfrac{1}{2}\left( \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^{+}_{\vec{p}} \right) + \tfrac{1}{2}\left( \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^{+}_{\vec{p}} + \hat{b}^{+}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} \right) \right\}$$

$$= \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \left\{ \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^{+}_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(\vec{0}) \right\} = \text{positiv !}$$

Besetzungszahloperatoren — unphysikalische "Vakuumenergie"

$\Longrightarrow$ $\hat{a}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$; daß heißt, ein solches Teilchen muß im Anfangszustand vorhanden sein; dadurch repräsentiert $\hat{a}_{\vec{p}}$ ein <u>einlaufendes Teilchen</u>.

$\hat{a}^{+}_{\vec{p}}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$; ein <u>auslaufendes Teilchen</u>.

$\hat{b}_{\vec{p}}$ ein <u>einlaufendes Antiteilchen</u>.

$\hat{b}^{+}_{\vec{p}}$ ein <u>auslaufendes Antiteilchen</u>.

Keine negative Energien!