2. Relativistische Quantenmechanik freier Teilchen

Wie schon erwähnt, ist die richtige Sprache für die Beschreibung relativistischer Teilchen die Quantenfeldtheorie. Jedoch können einige Prozesse, insbesondere die Eigenschaften freier Teilchen, einigermaßen auch mit einer relativistischen Version "klassischer" Quantenmechanik beschrieben werden, und wir fangen nun damit an.

2.1 Klein-Gordon-Gleichung (Spin-0)

Die Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens mit Masse m folgt von der nichtrelativistischen Relation $E = \vec{p}^2/2m$, mit den Substitutionen $E \to i\partial_t$, $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$, und der Interpretation als Differenzialoperator, der auf eine Wellenfunktion wirkt.

Können wir dies zur relativistischen Energieimpulsrelation verallgemeinern? Die Form sollte Lorentzkovariant sein

$$\Rightarrow \quad p^\mu p_\mu - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right]\psi = 0 \qquad \text{Klein-Gordon-Gleichung.}$$

Diese Gleichung beschreibt die Eigenschaften freier $J=0$ Teilchen, z.B. Pionen.

Historische Bemerkung: ursprünglich dachte man, daß die Klein-Gordon-Gleichung nicht physikalisch sein kann, weil die "Wahrscheinlichkeitdichte" $\rho = |\psi|^2$ nicht erhalten bleibt ($\partial_t \rho \neq \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$), während eine erhaltene Dichte $\rho' \equiv i(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$ nicht positiv ist. Dieses Problem hängt damit zusammen, daß die KG-Gleichung von zweiter Ordnung in t ist, und hat Dirac motiviert, eine Gleichung erster Ordnung zu finden.

Vom heutigen Sichtpunkt sind diese Überlegungen völlig irrelevant: ρ' wird als Ladungsdichte interpretiert, während die Dirac-Gleichung eine Bedeutung hat, die weit darüber geht, was er vorgesehen hatte.

2.2 Dirac-Gleichung (Spin-$\frac{1}{2}$) (1927)

Diracs grundsätzliche Strategie war es, die Beziehung $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$, wo $p^\mu = (E, \vec{p})$, zu faktorisieren. Für $\vec{p} = 0$ wäre dies einfach:

$$(p^0)^2 - m^2 = (p^0 - m)(p^0 + m) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p^0 - m = 0 \quad \text{oder} \quad p^0 + m = 0 \Rightarrow \text{erster Ordnung in } p^0.$$

Für $\vec{p} \neq 0$ nehmen wir einen Ansatz

$$p^\mu p_\mu - m^2 = (\beta^\kappa p_\kappa - m)(\gamma^\lambda p_\lambda + m),$$

worin $\beta^\kappa, \gamma^\lambda$ acht zu bestimmende Koeffizienten sind. Es folgt:

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad \& \quad m p_\lambda (\beta^\lambda - \gamma^\lambda) = 0.$$

$$\Rightarrow \gamma^\lambda \equiv \beta^\lambda$$

Explizit heißt dies:

$$(\gamma^0)^2 (p_0)^2 + (\gamma^1)^2 (p_1)^2 + (\gamma^2)^2 (p_2)^2 + (\gamma^3)^2 (p_3)^2$$
$$+ p_0 p_1 (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0) + p_0 p_2 (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0) + p_0 p_3 (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)$$
$$+ p_1 p_2 (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1) + p_1 p_3 (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1) + p_2 p_3 (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2) = (p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = -1, \quad (\gamma^2)^2 = -1, \quad (\gamma^3)^2 = -1, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0 \text{ für } \mu \neq \nu.$$

Wir könnten $\gamma^0 = \pm 1$, $\gamma^k = \pm i$, $k = 1,2,3$ nehmen, dann ist aber die letzte Relation nicht gefüllt.

Diracs brilliante Idee: Wäre es möglich, diese Gleichungen mit <u>Matrizen</u> zu lösen?

Wir definieren mit den geschweiften Klammern einen Antikommutator:

$$\{A, B\} \equiv AB + BA,$$

und suchen dann nach Matrizen mit den Eigenschaften

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}} \qquad (*)$$

Die erste Möglichkeit wären 2×2 - Matrizen. Die Pauli-Matrizen,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

haben die Eigenschaft

$$\{\sigma_k, \sigma_l\} = 2\delta_{kl},$$

aber die vierte unabhängige 2×2 - Matrix, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, führt zu $\{\mathbb{1}, \sigma_k\} = 2\sigma_k$, und kann damit nicht zur Erfüllung der Relation (*) benutzt werden.

Mit 4×4 - Matrizen[1] gibt es aber Lösungen! Die "Standard-Darstellung":

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir verlangen z.B.

$$\gamma^\mu p_\mu - m = 0$$

(die andere Möglichkeit ist letztendlich äquivalent, wie wir später sehen werden), und durch

$$p^0 = E \Rightarrow i\partial_t, \quad p_i = -p^i \Rightarrow i\partial_i \quad \Leftrightarrow \quad p_\mu \Rightarrow i\partial_\mu$$

bekommen wir die Dirac-Gleichung

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\Psi = 0 .}$$

Hier $m \equiv m \cdot \mathbb{1}_{4\times 4}$ und Ψ = Dirac-Spinor = vierkomponentiger Spaltenvektor.

Eine der schönsten und wichtigsten Gleichungen der Physik!

- Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen $\equiv$ zwei Freiheitsgrade
- Ψ = vier Freiheitsgrade $\equiv$ Teilchen + Antiteilchen !!

(Historische Bemerkungen:

(i) Dirac hat zuerst gedacht, daß Teilchen = Elektron, Antiteilchen = Proton. Jedoch gibt es nur eine Masse $\Rightarrow$ Antiteilchen $\equiv$ Positron!

(ii) Dirac selbst hielt diese Gleichung nicht für seine größte Leistung, weil sie "aus dem blauen Himmel", ohne zu viel Arbeit und Leiden, zu ihm kam!)

---

(1) Von $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, $\nu \neq \mu$, folgt $\mathrm{Det}[\gamma^\mu]\,\mathrm{Det}[\gamma^\nu] = (-1)^D\,\mathrm{Det}[\gamma^\nu]\,\mathrm{Det}[\gamma^\mu]$, wo D = Dimension. Wir verlangen $\mathrm{Det}[\gamma^\mu] \neq 0$, weshalb $D=3$ nicht möglich ist.

2.3 Maxwell-Gleichung (Spin-1)

Die älteste relativistische Wellengleichung ist die Maxwell-Gleichung.

Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$

Viererpotential: $A^\mu = (V, \vec{A}) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Die <u>freien</u> Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \iff \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

$$\iff \left(\Box \delta^\nu{}_\mu - \partial^\nu \partial_\mu\right) A^\mu = 0 ,$$

$$\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 = \text{d'Alembert-Operator}.$$

Jedoch gibt es hier zu viele Freiheitsgrade: jede $A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \phi$ ist auch eine Lösung, mit derselbe $F^{\mu\nu}$. Dies wird "Eichfreiheit" benannt.

$\Rightarrow$ Die Maxwell-Gleichungen mit der Lorentz-Konvention:

$$\begin{cases} \Box A^\mu = 0 \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \end{cases}$$

Jedoch gibt es noch eine nicht-triviale Freiheit $A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \phi$, mit allen Lösungen von $\Box \phi = 0$.

$\Rightarrow$ Die Maxwell-Gleichungen mit der Coulomb-Eichung:

$$\begin{cases} \Box A^\mu = 0 \\ A^0 = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases}$$

Jetzt gibt es nur noch Freiheit falls $\partial_0 \phi = 0$, $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$, was allerdings keine Wellenlösungen erlaubt.

Die Maxwell-Gleichung ist also im Wesentlichen der Klein-Gordon-Gleichung äquivalent.