1.4 Spezielle Relativitätstheorie

Vierervektoren

* Ortsvektor $\quad x^\mu$; $\quad x^0 = t,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$

  $x^\mu = (t, \vec{x})$

* Viererimpuls $\quad p^\mu$: $\quad p^0 = E,\ p^1 = p_x,\ p^2 = p_y,\ p^3 = p_z$

  $p^\mu = (E, \vec{p})$

* Vierergeschwindigkeit:

  $$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau},$$

  wo $x^\mu(\tau)$ = Weltlinie eines Teilchens
  τ = Eigenzeit — " —

  In Laborsystem, $\quad u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

  Für ein massives Teilchen: $\boxed{p^\mu = m u^\mu}$

$\boxed{\text{Viererimpuls bleibt immer erhalten!}}$

* Differentialoperatoren:

  $$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad ; \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Skalarprodukte

* Metrische Tensor $\quad \eta^{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

* Skalarprodukt: $\quad A \cdot B \equiv A_\mu B^\mu \equiv \eta_{\mu\nu} A^\nu B^\mu \equiv A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$

  $A^2 \equiv A \cdot A = (A^0)^2 - \vec{A} \cdot \vec{A}$

  $\Box \equiv \partial^\mu \partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$

Hier wurde die Einsteinsche Summenkonvention benutzt: über wiederholte griechische Indizes (einer tief- und der andere hochgestellt) wird von 0 bis 3 summiert.

$\boxed{\text{Ein Skalarprodukt ist immer invariant, daß heißt, hat den gleichen Wert in allen Inertialsystemen.}}$

Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe besteht aus linearen Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu$, in denen Skalarprodukte invariant bleiben.

* Lorentztransformationen:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$
$$B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu B^\nu$$

* Invarianz:

$$A' \cdot B' = \eta_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A^\alpha B^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$$

$$\Rightarrow \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

* In Matrixnotation:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \qquad | \text{ Det}$$
$$(\text{Det}\,\Lambda)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \text{Det}\,\Lambda = \pm 1$$

Und: $$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \quad \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1.$$

Die eigentlichen Lorentztransformationen: $\text{Det}\,\Lambda = +1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

Raumspiegelung: $\Lambda_P \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$; $x^0 \to x^0$, $\vec{x} \to -\vec{x}$

Zeitumkehr: $\Lambda_T \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$; $x^0 \to -x^0$, $\vec{x} \to \vec{x}$

Dann können alle Lorentztransformationen aus den eigentichen ("Λ_E") erhalten werden, durch $\Lambda_P \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_T \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_P \cdot \Lambda_T \cdot \Lambda_E$!

* Der vollständig antisymmetrische Einheitstensor:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für } 0123 \text{ und alle geraden Permutationen} \\ -1 & \text{für } \quad \text{— " — ungeraden — " —} \\ 0 & \text{bei 2 oder mehr gleichen Indizes} \end{cases}$$

In Lorentztransformationen:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\rho \Lambda^\delta{}_\sigma = \text{Det}\,\Lambda \cdot \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist invariant (sowie $\eta_{\mu\nu}$), falls $\text{Det}\,\Lambda = +1$.

— · —

1.5 Quantenmechanik

Klassische Mechanik: $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

Hamilton-Operator: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Schrödinger-Gleichung: $i\partial_t |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$

Vertauschungsrelation: $[\hat{x}_k, \hat{p}_\ell] = i\delta_{k\ell}$; $\delta_{k\ell}$ = Kronecker-Symbol

Energieeigenzustände: $\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$

$\Rightarrow |n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |n(0)\rangle$

In Ortsdarstellung: $\Psi(x,t) = \langle x | \Psi(t)\rangle$; $\langle\ldots|$ = "bra", $|\ldots\rangle$ = "ket"

$\hat{x}_\ell \Rightarrow x_\ell$

$\hat{p}_\ell \Rightarrow -i\partial_\ell$

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x)\right]\Psi(x,t) = i\partial_t \Psi(x,t)$$

Der harmonische Oszillator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$

$\Rightarrow$ Vernichtungsoperator: $\hat{a}$ ⎫ Leiteroperatoren
Erzeugungsoperator: $\hat{a}^+$ ⎭

Besetzungszahloperator: $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$

Hamilton-Operator: $\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$

Angeregter Zustand: $|n\rangle$

$\Rightarrow$ $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ ↘ absenken

$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ ↗ erheben

Störungstheorie

$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$, $g \ll 1$

$E_n = E_n^{(0)} + g\,E_n^{(1)} + O(g^2)$ Reihenentwicklung

$\hat{H}_0 |n\rangle^{(0)} = E_n^{(0)} |n\rangle^{(0)}$

$$\Rightarrow E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n|\,\hat{V}\,|n\rangle^{(0)}$$

Zeitabhängigkeit

Schrödinger-Darstellung

Alle Zeitabhängigkeit in den Zuständen; Operatoren zeitunabhängig.

$$i\partial_t |\Psi\rangle_S = \hat{H}|\Psi\rangle_S$$

$$\Rightarrow \quad |\Psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle_S$$

$$\langle \hat{A}_S \rangle \equiv {}_S\langle \Psi(t)|\hat{A}_S|\Psi(t)\rangle_S .$$

Heisenberg-Darstellung

Zeitabhängigkeit in den Operatoren; Zustände zeitunabhängig.

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}t}$$

$$\Rightarrow \quad i\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}\right]$$

$$\langle \hat{A}_H(t) \rangle = {}_S\langle \Psi(0)|\hat{A}_H(t)|\Psi(0)\rangle_S = \langle \hat{A}_S \rangle$$

Dirac-Darstellung / Wechselwirkungsdarstellung

$$\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + g\hat{V}$$

$$|\Psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0 t}|\Psi(t)\rangle_S$$

$$\hat{A}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t}$$

$$\hat{V}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle_I}} = e^{i\hat{H}_0 t}\left[-\hat{H}_0 + \hat{H}\right]|\Psi(t)\rangle_S = \underline{\underline{g\hat{V}_I(t)|\Psi(t)\rangle_I}}$$

$$\underline{\underline{i\frac{d}{dt}\hat{A}_I(t)}} = \underline{\underline{\left[\hat{A}_I(t), \hat{H}_0\right]}}$$

Definieren wir den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t,t_0)$ durch

$$|\Psi(t)\rangle_I \equiv \hat{U}_I(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle_I ,$$

dann folgt

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_I(t,t_0) = g\hat{V}_I(t)\hat{U}_I(t,t_0)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\hat{U}_I(t_0,t_0) = \mathbb{1} = \text{Einheitsmatrix}.$$