Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 13**	15.07.2005

[Mi 20.07.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1:
Wir wissen aus der Vorlesung, daß die Darstellungen einer Gruppe mit Mittelbildung unitär sind und der Gleichung $M\,[\mathscr{D}_{b'a'}(g^{-1})\,\mathscr{D}_{ab}(g)] = \delta_{aa'}\,\delta_{bb'}/d$ genügen. Zeigen Sie, daß

(a) für feste a,b gilt: $M\,[\mathscr{D}^*_{ab}(g)\,\mathscr{D}_{ab}(g)] = 1/d$,

(b) daher alle irreduziblen Darstellungen endlichdimensional sind.

Aufgabe 2:
Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung $|\mathcal{G}|$ mit $d^{(i)}$-dimensionalen, irreduziblen Darstellungen $\mathscr{D}^{(i)}$. Für jedes i und jeweils jedes $k, l = 1, \ldots, d^{(i)}$ bilden wir den Vektor $(\mathscr{D}^{(i)}_{kl}(g_1), \mathscr{D}^{(i)}_{kl}(g_2), \ldots, \mathscr{D}^{(i)}_{kl}(g_{|\mathcal{G}|}))$. Diese $\sum_i [d^{(i)}]^2$ Vektoren sind folglich $|\mathcal{G}|$-dimensional.

(a) Überzeugen Sie sich davon, daß diese Vektoren orthogonal bezüglich des Skalarproduktes $\langle\!\langle\ |\ \rangle\!\rangle$ sind.

(b) Leiten Sie damit her, daß gilt $\sum_i [d^{(i)}]^2 \leq |\mathcal{G}|$.

[Das Theorem von Burnside sagt, daß in Aufgabe 2.b sogar die Gleichheit erfüllt ist.]

Aufgabe 3:
Betrachten wir die Gruppe S_3 [siehe Aufgabe 1.4]

$$S_3 = \{(123), (132), (213), (231), (312), (321)\} \equiv \{(ijk)\}$$

sowie zwei eindimensionale Darstellungen

$$\mathscr{D}^{(1)}[(ijk)] \equiv 1\,, \qquad\qquad \mathscr{D}^{(2)}[(ijk)] \equiv \epsilon_{ijk}$$

dieser. Die dritte irreduzible Darstellung $\mathscr{D}^{(3)}$ sei zweidimensional.

(a) Verifizieren Sie, daß $\mathscr{D}^{(1)}$ und $\mathscr{D}^{(2)}$ tatsächlich Darstellungen sind.

(b) Ermitteln Sie die Charaktertafel für $\mathscr{D}^{(1)}$ und $\mathscr{D}^{(2)}$, d.h. die Zahlen $\chi^{(1)}(g)$ und $\chi^{(2)}(g)$ als Funktionen von g.

(c) Können Sie die Charaktere $\chi^{(3)}(g)$ ableiten?
[*Hinweis*: Es gilt $\chi(g) = \chi(g' \cdot g \cdot g'^{-1})$. Bilden Sie also zuerst die verschiedenen Konjugationsklassen.]

(d) Eine dreidimensionale Darstellung ist durch die 3×3-Matrizen $\mathscr{D}$ mit den Matrixelementen $\mathscr{D}_{1n}[(ijk)] \equiv \delta_{ni}$, $\mathscr{D}_{2n}[(ijk)] \equiv \delta_{nj}$ und $\mathscr{D}_{3n}[(ijk)] \equiv \delta_{nk}$ gegeben. Warum kann diese nicht irreduzibel sein? Wie lautet die Ausreduktion?