Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 12**	08.07.2005

[Mi 13.07.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: *Lemma von Schur:* Seien $\mathscr{D}(g)$ die Darstellungsmatrizen einer irreduziblen [z.B. definierenden] Darstellung und S eine Matrix mit der Eigenschaft $\mathscr{D}(g)S = S\mathscr{D}(g) \quad \forall g \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie, daß S dann proportional zur Einheitsmatrix ist.
[*Hinweis:* Irreduzibilität heißt, daß keine invarianten Unterräume existieren. Sei v_λ ein Eigenvektor von S, d.h. $Sv_\lambda = \lambda v_\lambda$. Weisen Sie nach, daß dann auch $\mathscr{D}(g)v_\lambda$ ein Eigenvektor von S mit demselben Eigenwert ist. Weil es keine invarianten Unterräume gibt, muß die Menge $\{\mathscr{D}(g)v_\lambda\}$ den ganzen Darstellungsraum aufspannen. Das bedeutet, für **alle** Vektoren des Darstellungsraums gilt $Sv = \lambda v$.]

Aufgabe 2: Was ist das Zentrum der $SU(n)$? [*Hinweis:* Lemma von Schur.]

Aufgabe 3: In der Vorlesung haben wir den Homomorphismus $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$, $\varphi(M) = \Lambda \in L_+^\uparrow$, mit der Wirkung

$$A' \equiv x'^\mu \, \sigma_\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \sigma_\mu \equiv M \; A \; M^\dagger$$

auf $A \equiv x^\mu \, \sigma_\mu$ kennengelernt. Wie lautet $\mathrm{Kern}(\varphi)$?
[*Hinweis:* Falls $M \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, so muß $A = M \; A \; M^\dagger$ für alle möglichen hermiteschen A gelten. Verwenden Sie dazu das Lemma von Schur.]
Zu welcher Faktorgruppe ist $L_+^\uparrow$ isomorph?

Aufgabe 4: Wir wissen, daß die $SU(2)$ und $SO(3)$ homomorph sind [siehe Aufgabe 2.4]. Daher haben sie dieselben Lie-Algebren. Zeigen Sie, daß ihre Zentren jedoch verschieden sind.
[Diese Tatsache schließt die halbzahligen Darstellungen für die $SO(3)$ aus. Die $SU(2)$ ist die „Überlagerungsgruppe" der $SO(3)$ und es gilt $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$.]