Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 11**	01.07.2005

[Mi 06.07.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: Die allgemeine Vertauschungsrelation der Lorentzalgebra lautet

$$[Z_{\mu\nu}, Z_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} Z_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} Z_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} Z_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} Z_{\nu\rho}\ .$$

Zeigen Sie, daß diese mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
[Z_{23}, Z_{23}] &= 0\,, \qquad [Z_{23}, Z_{31}] = Z_{12}\,, \qquad [Z_{23}, Z_{12}] = -Z_{31}\,, \\
[Z_{23}, Z_{10}] &= 0\,, \qquad [Z_{23}, Z_{20}] = Z_{30}\,, \qquad [Z_{23}, Z_{30}] = -Z_{20}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

aus der Vorlesung verträglich ist.

Aufgabe 2: Weisen Sie nach, daß die 4×4-Matrizen aus Aufgabe 10.3 den Gleichungen (1) genügen. (Sie können damit als Generatoren $\mathscr{D}(Z_{\mu\nu})$ für die vierdimensionale Darstellung dienen.)

Aufgabe 3: Seien γ_μ die Dirac-Matrizen, d.h. sie genügen der Clifford-Algebra $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}_{4\times4}$. Betrachten Sie die Standard-Darstellung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\,, \qquad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Alternativ zu Aufgabe 2 kann die vierdimensionale Darstellung durch $\mathscr{D}(Z_{\mu\nu}) = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4$ definiert werden. Verifizieren Sie, daß die Gleichungen (1) auch hier erfüllt sind.

Aufgabe 4: Seien $\sigma_\mu \equiv (\mathbb{1}, \sigma_k)$ und $\bar{\sigma}_\mu \equiv (\mathbb{1}, -\sigma_k)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Generatoren der definierenden Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ (aus der Vorlesung) als

$$Z_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right)$$

geschrieben werden können.

(b) In der sogenannten Weyl-Darstellung gilt

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Wo findet sich der Teil $Z_{\mu\nu}$ der Aufgabe 4(a) in den vierdimensionalen Matrizen $\mathscr{D}(Z_{\mu\nu}) = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4$ wieder?