Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 09**	17.06.2005

[Mi 22.06.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: Die Isospins I_3 der u-, d- und s-Quarks sind $1/2, -1/2, 0$ und die elektrischen Ladungen Q sind $2/3, -1/3, -1/3$. Wir schreiben $w_2 \equiv \sqrt{3}Y/2$, wobei Y als „Hyperladung" bezeichnet wird. Können Sie Y als Linearkombination von I_3 und Q schreiben?

Aufgabe 2: Seien T^a die Generatoren der Isospin-$SU(2)$ und $\hat{U}_I$ ein Zeitentwicklungsoperator mit der Eigenschaft $[T^a, \hat{U}_I] = 0$. Zeigen Sie, daß

$$\langle I, I_3|\hat{U}_I|I, I_3\rangle$$

unabhängig von I_3 ist.

Aufgabe 3: Betrachten Sie nun einen Operator $\hat{H}_I$, der unter einer Darstellung $\mathscr{D}$ mit der Dimension $d = 2I' + 1$ transformiert, d.h.

$$[T^a, (\hat{H}_I)_m] = (\hat{H}_I)_n \left(\mathscr{D}(T^a)\right)_{nm} \qquad \text{mit} \qquad m = 1, \ldots, d.$$

Nehmen Sie des weiteren an, daß $(\mathscr{D}(T^3)_{mn})$ diagonal ist, d.h.

$$(\hat{H}_I)_n(\mathscr{D}(T^3))_{nm} = I'_3 \, (\hat{H}_I)_m \, .$$

Zeigen Sie, daß gilt

$$\langle J, J_3|(\hat{H}_I)_m|I, I_3\rangle \propto \delta_{J_3, I_3+I'_3} \, .$$

Argumentieren Sie ferner, in Analogie zu Aufgabe 2, daß die einzige Abhängigkeit von I_3, I'_3, J_3 durch $\langle J, J_3| \left[\, |I', I'_3\rangle \, |I, I_3\rangle \, \right]$ gegeben ist.

Aufgabe 4: In der Vorlesung haben wir zwei Amplituden $A_{\Delta I=3/2}$ und $A_{\Delta I=1/2}$ für Kaonzerfälle definiert. Verifizieren Sie, daß

(a) $$_s\langle \pi^+\pi^-|\hat{H}_I|K^0_S\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}} A_{\Delta I=3/2} + \sqrt{\tfrac{2}{3}} A_{\Delta I=1/2} \, ,$$

(b) $$_s\langle \pi^+\pi^0|\hat{H}_I|K^+\rangle = \tfrac{\sqrt{3}}{2} A_{\Delta I=3/2} \, .$$

[*Bemerkung:* Die Kaonzerfälle sind experimentell sehr genau verstanden und man weiß, daß $|A_{\Delta I=1/2}| \gg |A_{\Delta I=3/2}|$ gilt. Diese Tatsache ist auch als die „$\Delta I = 1/2$-Regel" bekannt.]