Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 08**	10.06.2005

[Mi 15.06.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: Die Symmetrisierungen und Antisymmetrisierungen der Tensormethode können auch als Projektionen definiert werden. Seien [für die $SU(3)$]

$$[P_s]^{ij}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k\right) \qquad , \qquad [P_a]^{ij}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k\right) \; .$$

Zeigen Sie, daß gilt:

(a)
$$[P_s]^{ij}_{kl} + [P_a]^{ij}_{kl} = \delta^i_k\,\delta^j_l \, , \qquad [P_s]^{ij}_{kl}\,[P_s]^{kl}_{mn} = [P_s]^{ij}_{mn} \, ,$$
$$[P_a]^{ij}_{kl}\,[P_a]^{kl}_{mn} = [P_a]^{ij}_{mn} \, , \qquad [P_s]^{ij}_{kl}\,[P_a]^{kl}_{mn} = 0 \, .$$

(b)
$$[P_s]^{ij}_{ij} = 6 \, , \qquad [P_a]^{ij}_{ij} = 3 \, .$$

Wie formuliert man die Ausreduktion $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{6}\oplus\mathbf{3}^*$ mit diesen Projektoren? Warum erhält man die Dimensionen wie in Aufgabe (b)?

Aufgabe 2: Seien nun [für die $SU(3)$]

$$[P_t]^{ik}_{jl} = \delta^i_l\delta^k_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\delta^k_l \qquad , \qquad [P_l]^{ik}_{jl} = \frac{1}{3}\delta^i_j\delta^k_l \; .$$

Zeigen Sie, daß gilt:

(a)
$$[P_t]^{ik}_{jl} + [P_l]^{ik}_{jl} = \delta^i_l\,\delta^k_j \, , \qquad [P_t]^{ik}_{jl}\,[P_t]^{lm}_{kn} = [P_t]^{im}_{jn} \, ,$$
$$[P_l]^{ik}_{jl}\,[P_l]^{lm}_{kn} = [P_l]^{im}_{jn} \, , \qquad [P_t]^{ik}_{jl}\,[P_l]^{lm}_{kn} = 0 \, .$$

(b)
$$[P_t]^{ij}_{ji} = 8 \, , \qquad [P_l]^{ij}_{ji} = 1 \, .$$

Wie formuliert man die Ausreduktion $\mathbf{3}^*\otimes\mathbf{3} = \mathbf{8}\oplus\mathbf{1}$ mit diesen Projektoren?

Aufgabe 3: Seien nun [für die $SU(3)$]

$$\begin{aligned}
[P_A]^{ijk}_{mno} &\equiv \frac{1}{6}\left(\delta^i_m\,\delta^j_n\,\delta^k_o + \delta^i_m\,\delta^j_o\,\delta^k_n + \delta^i_n\,\delta^j_o\,\delta^k_m + \delta^i_n\,\delta^j_m\,\delta^k_o + \delta^i_o\,\delta^j_m\,\delta^k_n + \delta^i_o\,\delta^j_n\,\delta^k_m\right) \; , \\
[P_B]^{ijk}_{mno} &\equiv \frac{1}{6}\,\varepsilon^{jkt}\left(2\,\delta^i_m\,\varepsilon_{not} + \delta^i_n\,\varepsilon_{mot} + \delta^i_o\,\varepsilon_{nmt}\right) \; , \\
[P_C]^{ijk}_{mno} &\equiv \frac{1}{6}\left[\varepsilon^{ikt}\left(\delta^j_n\,\varepsilon_{mot} + \delta^j_o\,\varepsilon_{mnt}\right) + \varepsilon^{ijt}\left(\delta^k_n\,\varepsilon_{mot} + \delta^k_o\,\varepsilon_{mnt}\right)\right] \; , \\
[P_D]^{ijk}_{mno} &\equiv \frac{1}{6}\,\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{mno} \, .
\end{aligned}$$

Diese sind die Projektoren für die Ausreduktion von 3-Quark-Zuständen, d.h. $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$.

(a) Verifizieren Sie, daß $[P_A]^{ijk}_{mno} + [P_B]^{ijk}_{mno} + [P_C]^{ijk}_{mno} + [P_D]^{ijk}_{mno} = \delta^i_m\,\delta^j_n\,\delta^k_o$ gilt.

(b) Was sind die Dimensionen der projizierten irreduziblen Darstellungen?

(c) Führen Sie dieselbe Reduktion mit Gewichtsdiagrammen durch.