Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 05**	20.05.2005

[Mi 25.05.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Algebra $su(2)$ in der fundamentalen Darstellung $\mathbf{2}$.

(a) Konstruieren Sie die Cartan Unteralgebra **h**.

(b) Was sind die Gewichtsvektoren?

(c) Konstruieren Sie die unabhängigen Generatoren E_α mit $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$ und $H_i \in \mathbf{h}$.

(d) Was sind die Wurzelvektoren?

[*Bemerkung:* Die H_i werden durch $\mathrm{Sp}[H_i H_j] = \delta_{ij}/2$ normiert, die E_α hingegen durch $\mathrm{Sp}[E_\alpha E_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}/2$]

Aufgabe 2: Betrachten wir die Generatoren (vgl. Aufgabe 3.3)

$$X^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Basis in der X^1 diagonal ist. Wie sehen die Gewichtsvektoren aus?

Aufgabe 3: Betrachten Sie nun die Generatoren

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y^2 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Linearkombination $E = c_1 Y^1 + c_2 Y^2$ mit $c_i \in \mathbb{C}$, so daß $[H, E] = \alpha E$. Wie lautet die entsprechende Wurzel α?

(b) Zeigen Sie, daß $[H, E^\dagger] = -\alpha E^\dagger$.

(c) Wie lautet die vollständige Liste der Wurzeln?