Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 04**	13.05.2005

[Mi 18.05.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: Betrachten Sie Invarianzgruppen mit der Eigenschaft $g^\dagger \eta g = \eta$, wobei $\eta^\dagger = \eta$ gilt und η^{-1} existiert. Seien T^a die Generatoren, d.h. $(T^a)^\dagger \eta = \eta T^a$ mit $a = 1, \ldots, \dim$, und $v = \sum_{a=1}^{\dim} v^a T^a$ mit $v^a \in \mathbb{R}$. Die adjungierte Darstellung ist definiert durch die Abbildung $g \mapsto D(g)$ mit $v' \equiv [D(g)](v) \equiv g v g^{-1}$.

(a) Zeigen Sie, daß $D(g)$ die Eigenschaft $v^\dagger = \eta v \eta^{-1}$ erhält.

(b) Sei $g = \exp\left(i \sum_{a=1}^{\dim} \theta^a T^a\right)$ mit $\theta^a \ll 1$. Die Generatoren F^a der adjungierten Darstellung können aus der Reihenentwicklung

$$(v')^b = v^b + \sum_{a,c=1}^{\dim} i\, \theta^a (F^a)^{bc} v^c + \mathcal{O}(\theta^2)$$

abgelesen werden. Überzeugen Sie sich davon, daß $(F^a)^{bc} = -i f^{abc}$ gilt.

(c) Beweisen Sie ausgehend von der Jacobi-Identität, daß $[F^a, F^b] = i f^{abc} F^c$.

Aufgabe 2: Sei d die Dimension einer Darstellung, T die Normierung der Generatoren ($\mathrm{Sp}[T^a T^b] \equiv T \cdot \delta^{ab}$) in dieser Darstellung und C die „quadratische Casimir-Konstante" definiert durch $\sum_{a=1}^{\dim} (T^a T^a)_{AB} \equiv C \cdot \delta_{AB}$. Zeigen Sie, daß

(a) für die fundamentale Darstellung der $SU(n)$ gilt:

$$d_F = n\,, \qquad T_F = 1/2\,, \qquad C_F = (n^2-1)/2n\,.$$

(b) für die adjungierte Darstellung der $SU(n)$ [d.h. $T^a \to F^a$ mit F^a aus Aufgabe 1] gilt:

$$d_A = n^2 - 1\,, \qquad T_A = n\,, \qquad C_A = n\,.$$

Aufgabe 3: Weisen Sie die Äquivalenz der Darstellungen $\mathbf{2}$ und $\mathbf{2}^*$ für die $SU(2)$ nach. [*Hinweis:* Benutzen Sie die Pauli-Matrix σ^2 als S.]

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Matrix v aus Aufgabe 1. Leiten Sie für die $SU(2)$ die Beziehungen $\mathrm{Sp}[v^3] = 0$ und $\mathrm{Sp}[v^4] = (\mathrm{Sp}[v^2])^2/2$ her.