Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 03**	06.05.2005

[Mi 11.05.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie ausgehend von $f^{abc} = -2i\,\mathrm{Sp}\left\{\left[T^a, T^b\right] T^c\right\}$, daß f^{abc} antisymmetrisch in $a \leftrightarrow b$, $a \leftrightarrow c$ sowie $b \leftrightarrow c$ ist.

(b) Zeigen Sie ausgehend von der Jacobi-Identität, daß gilt:

$$f^{abd} f^{cde} + f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} = 0\,, \qquad a, b, c, e = 1, \ldots, \dim\,.$$

[Hier wird die Einsteinsche Summenkonvention benutzt.]

(c) Definieren wir $\mathrm{Sp}\left\{T^a T^b T^c\right\} \equiv \left(d^{abc} + i f^{abc}\right)/4$. Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation (Aufgabe 4), um d^{aac} für die $SU(n)$ zu bestimmen.

Aufgabe 2: Laut Vorlesung kann jedes $A \in SU(2)$ als $A = \exp\left(i\theta^a \sigma^a/2\right)$ geschrieben werden, wobei σ^a die Pauli-Matrizen sind. Überzeugen Sie sich, daß diese Parametrisierung zu derselben Form von A führt, wie die in der Vorlesung hergeleitete Parametrisierung der $SU(2)$ als S^3.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Lie-Algebra der $SO(3)$.

(a) Was für Eigenschaften haben die Generatoren T^a?

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis. (Normiert durch $\mathrm{Sp}\{T^a T^b\} = \delta^{ab}/2$)

(c) Was sind die Strukturkonstanten in dieser Basis?

Aufgabe 4: Seien T^a mit $a = 1, \ldots, n^2 - 1$ die Generatoren der $SU(n)$
[d.h. $(T^a)^\dagger = T^a$ und $\mathrm{Sp}\{T^a\} = 0 \quad \forall a$] normiert durch $\mathrm{Sp}\{T^a T^b\} = \delta^{ab}/2$.
Darüberhinaus sei $T^0 \equiv \mathbb{1}_{n\times n}/\sqrt{2n}$ sowie M eine beliebige $n\times n$-Matrix.

(a) Zeigen Sie, daß $M = \sum_{A=0}^{n^2-1} C^A T^A$, wobei $C^A = 2\,\mathrm{Sp}\{T^A M\} \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a), daß gilt:

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} T^a_{ij} T^a_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\,\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\,.$$