Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 02**	29.04.2005

[Mi 04.05.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1: Parametrisieren Sie die Gruppe $SO(2)$ und zeigen Sie, daß die $SO(2)$ isomorph zur $U(1)$ ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß gilt:

(a) $\dim SO(n) = n(n-1)/2$,

(b) $\dim U(n) = n^2$,

(c) $\dim SU(n) = n^2 - 1$.

Aufgabe 3: Einige Mannigfaltigkeiten (z.B. S^2) erlauben keine Gruppenstrukturen, andere mehrere. In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, daß der $\mathbb{R}^3$ zusammen mit der Vektoraddition als Verknüpfung eine Gruppe ist. Beweisen Sie, daß der $\mathbb{R}^3$ auch mit der Verknüpfung

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) \equiv \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(y_1 x_2 - x_1 y_2) \right)$$

eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4: Die Paulimatrizen sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Sei ferner $A \in SU(2)$. Betrachten Sie die Abbildung $A \to R(A)$, wobei R eine 3×3-Matrix ist mit

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \mathrm{Sp} \left[\sigma_i A \sigma_j A^\dagger \right] .$$

Zeigen Sie, daß $R \in SO(3)$.

[*Hinweis:* Starten Sie mit $v, w \in \mathbb{R}^3$ und betrachten Sie die Transformationen $v \mapsto v'$, $w \mapsto w'$, wobei $\sum_i v'_i \sigma_i \equiv A \sum_j v_j \sigma_j A^\dagger$ und $\sum_i w'_i \sigma_i \equiv A \sum_j w_j \sigma_j A^\dagger$. Zeigen Sie dann, daß $v', w' \in \mathbb{R}^3$ und $\sum_i v'_i w'_i = \sum_j v_j w_j$. Damit ist gezeigt, daß es sich um eine lineare, orthogonale Transformation handelt. Benutzen Sie daraufhin $\mathrm{Sp}\,[\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij}$, um die Transformationsmatrix R herauszuprojizieren. Um $\mathrm{Det}\, R = 1$ nachzuweisen, können Sie dann die Eigenschaften der Gruppenmannigfaltigkeit der $SU(2)$ verwenden.]