Symmetrien in der Physik	**Übungsblatt Nr. 01**	22.04.2005

[Mi 27.04.2005, 16:15, D6-135]

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, daß das Einselement e einer Gruppe eindeutig ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Inverse g^{-1} für gegebenes g eindeutig ist.

Aufgabe 2: Konstruieren Sie die Multiplikationstabelle für eine allgemeine Gruppe dritter Ordnung. Wieviele unabhängige Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 3: Betrachten Sie die folgenden zwei Gruppen vierter Ordnung:

(i) Die zyklische Gruppe vierter Ordnung$\equiv \mathbb{Z}_4 \equiv \{e, a, a^2, a^3\}$, mit $a^2 \equiv a \cdot a$, $a^3 \equiv a \cdot a \cdot a$ sowie $a^4 \equiv a \cdot a \cdot a \cdot a \equiv e$.

(ii) Die Vierergruppe $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2 \equiv \{e, a\}$ mit $a^2 \equiv a \cdot a \equiv e$;
Elemente der V_4 sind von der Form (g_1, f_1), mit jeweils $g_1, f_1 \in \mathbb{Z}_2$, wobei die Multiplikation durch $(g_1, f_1) \cdot (g_2, f_2) \equiv (g_1 \cdot g_2, f_1 \cdot f_2)$ definiert ist.

(a) Sind $\mathbb{Z}_4$ und V_4 isomorph zueinander?

(b) Seien die Gruppen G_1, G_2, G_3 definiert durch

(*) $G_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $\cdot \equiv + \mod 4$,

(*) $G_2 = \exp(i\pi n/2)$ mit $n = 0, 1, 2, 3$ und $\cdot \equiv \times$,

(*) $G_3 = \{(x \to x, y \to y), (x \to -x, y \to -y), (x \to -x, y \to y), (x \to x, y \to -y)\}$
mit $\cdot \equiv$ kombinierte Transformation.

Sind G_1, G_2, G_3 isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ und/oder zu V_4?

Aufgabe 4: S_N ist die Gruppe aller Permutationen von N Elementen.

(a) Konstruieren Sie die Multiplikationstabelle für S_3.

(b) Ist S_3 abelsch oder nichtabelsch?

(c) Finden Sie Untergruppen von S_3?

(d) Falls ja, zu welchen der oben studierten Gruppen sind sie isomorph?