

FAKULTÄT FÜR PHYSIK
UNIVERSITÄT BIELEFELD

Theoretische Physik

Symmetrien in der Physik

Dozent: Prof. Dr. Mikko Laine

SS 2005

Stand: 22. Oktober 2005

Symmetrien in der Physik

Prof. Dr. Mikko Laine

Symmetrien in der Physik

Theoretische Physik
Vorlesungsmitschrift

Dozent: Prof. Dr. Mikko Laine.

SS 2005

Fakultät für Physik,
Universität Bielefeld,
Germany.

<http://www.physik.uni-bielefeld.de>

<http://www.uni-bielefeld.de>

Skript: Benjamin Jurke, bjurke@gmx.de.

Letzte Änderung: 22. Oktober 2005.

<http://www.study.brimspark.de>

Schriftbild: Modern Times 11 pt *Satzsystem:* L^AT_EX 2_ε mit A_MS-L^AT_EX, METAFONT, X_Y-pic

Enthält Literaturangaben und einen Index.

Copyright © 2004, 2005 Prof. Dr. Mikko Laine, Benjamin Jurke.

Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange sein Inhalt einschließlich Autoren- und Copyright-Angabe unverändert bleibt und die Verteilung kostenlos erfolgt, abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang, etc.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundbegriffe	3
2.1	Diskrete Gruppen	3
2.2	Kontinuierliche Gruppen	4
2.2.1	Kontinuierliche, Lie- und Matrix-Gruppen	4
2.2.2	Invarianzgruppen	5
2.2.3	Die Gruppe $SO(2)$ und die Isomorphie $SO(2) \cong U(1)$:	7
2.2.4	Die Gruppe $SU(2)$	8
2.2.5	Lokale Äquivalenz von $SU(2)$ und $SO(3)$	10
2.3	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	11
2.3.1	Exponentialdarstellung von Lie-Gruppen	11
2.3.2	Lie-Algebren	12
2.3.3	Eigenschaften der Generatoren und Strukturkonstanten	14
2.3.4	Zusatz: Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel	16
3	Darstellungstheorie	18
3.1	Allgemeines	18
3.1.1	Definition von Darstellungen	18
3.1.2	Wichtige spezielle Darstellungen	19
3.1.3	Ähnlichkeitstransformationen, treue und unitäre Darstellungen	21
3.1.4	Summen und Produkte von Darstellungen	23
3.2	Gewichte und Wurzeln	24
3.2.1	Die maximal kommutative Cartan-Unteralgebra	24
3.2.2	Gewichte	25
3.2.3	Wurzeln	26
3.2.4	Zusammenhang von Wurzeln und Gewichten	27
3.3	Klassifikation von Darstellungen	28
3.3.1	Klassifikation endlichdimensionaler irreduzibler unitärer Darstellungen	28
3.3.2	Explizite Darstellungen der $SU(3)$	30
3.3.3	Zusatz: Herleitung der Hauptformel	32
3.4	Ausreduktion	34
3.4.1	Gewichte von Summen- und Produkt-Darstellungen	34
3.4.2	Generatoren, Gewichte und Wurzeln der Spin-Gruppe $SU(2)$	35
3.4.3	Clebsch-Gordan-Zerlegung in der $SU(2)$	37
3.4.4	Verallgemeinerung	38
3.5	Tensormethode der Ausreduktion	39
3.5.1	Produkte fundamentaler und konjugierter Darstellungen	39
3.5.2	Zusätzlicher invarianter ϵ -Tensor	40

3.5.3	Formulierung der Ausreduktion mit Projektoren	41
3.5.4	Zusatz: Dimension $d(q^1, q^2)$ einer allgemeinen $SU(3)$ -Darstellung	44
3.6	Anwendungen	45
3.6.1	Teilchenspektren	45
3.6.2	Elastische Streuung	46
3.6.3	Symmetriebrechende Zerfälle	48
4	Die Gruppe der Lorentz-Transformationen	50
4.1	Lorentz-Gruppe und $SL(2, \mathbb{C})$	50
4.1.1	Bestandteile der Lorentz-Gruppe	50
4.1.2	Topologie der Lorentz-Gruppe	51
4.1.3	Homomorphismus von \mathcal{L}_+^\uparrow und $SL(2, \mathbb{C})$	52
4.2	Irreduzible Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$	54
4.2.1	Die Lorentz-Algebra	54
4.2.2	Cartan-Unteralgebra und Darstellungen	55
4.2.3	Entsprechende Physik der Lorentz-Invarianz	56
5	Globale Gruppeneigenschaften	58
5.1	Algebraische Eigenschaften	58
5.1.1	Zentrum, Faktorgruppe, etc.	58
5.1.2	Der Homomorphiesatz	60
5.2	Ausreduktion mit Charakteren	61
5.2.1	Mittelbildung	61
5.2.2	Die Orthogonalitätsrelation für Charaktere	62

1 Einführung

Diese Vorlesung behandelt physikalische Symmetrien und ihre mathematische Formulierung im Rahmen der Theorie. Es gibt Symmetrien in Zuständen von physikalischen Systemen (etwa in Schneeflocken, Kristallen, etc.), aber auch Invarianzen in den bekannten Naturgesetzen (Unabhängigkeit vom Ort, von der Zeit, etc.). Die möglichen Symmetrien der Zustände werden dabei durch die Invarianzen der Naturgesetze bestimmt, ohne dass wir die genaue Form der letzteren kennen müssen. Dies macht die mathematische Behandlung von Symmetrien zu einem wichtigen Werkzeug für die Physik.

Zunächst müssen wir betrachten, welche Struktur unserer Beschreibung zugrunde liegt. Die Struktur der Quantenmechanik setzt sich wie folgt zusammen:

- **Zustände** $|\psi\rangle$ bilden einen linearen Raum, denn für $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in V$ ist auch die Linearkombination $a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle \in V$ für beliebige Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$. Außerdem gibt es ein Skalarprodukt

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \in \mathbb{C}$.

- Die physikalischen Größen sind **Operatoren**, dies sind Abbildung der Form $V \longrightarrow V$. Beispiele sind etwa der Hamilton-Operator \hat{H} der Gesamtenergie, der in der Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ eine wichtige Verwendung findet.
- Die **Energieeigenzustände** mit $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ sind die „stabilen“ (bzw. stationären) Zustände eines Systems.
- Physikalische Eigenschaften eines Zustandes entsprechen den **Erwartungswerten** verschiedener Operatoren.

Symmetrien gibt es in der Physik, wenn man Operatoren \hat{Q}_i finden kann, die sowohl mit dem Hamilton-Operator \hat{H} , als auch miteinander vertauschen:

$$[\hat{H}, \hat{Q}_i] = [\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0 .$$

Die jeweiligen Operatoren haben dann gemeinsame Eigenzustände, d.h. die möglichen Entartungen der Energie-Eigenzustände hängen davon ab, was für Eigenzustände \hat{Q}_i besitzt. Warum aber gibt es in diesem Fall Symmetrien?

1. Die entarteten Eigenzustände sehen ähnlich aus.
2. Betrachten wir die Transformation $\hat{H}' = e^{i\alpha\hat{Q}_i} \hat{H} e^{-i\alpha\hat{Q}_i}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, dann bleibt \hat{H} invariant, d.h. es gilt $\hat{H}' = \hat{H}$.
3. Der Erwartungswert $\langle \psi | \hat{Q}_i | \psi \rangle$ ist eine Erhaltungsgröße, denn es gilt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | \hat{Q}_i | \psi \rangle = \langle \psi | [\hat{Q}_i, \hat{H}] | \psi \rangle = 0 .$$

Nach dem Noether-Theorem gehört zu jeder Erhaltungsgröße stets eine Symmetrie.

Die Frage ist nun, wie diese Eigenschaften mit der Mathematik zusammenhängen, d.h. wie sie im Rahmen von Hilbert-Räumen und Operatoren beschrieben werden.

- Die Transformationen, in denen der Hamilton-Operator \hat{H} invariant bleibt, entsprechen genau den Elementen einer Gruppe.
- Die entarteten Mengen der Energie-Eigenzustände entsprechen genau den invarianten Unterräumen von V , die wiederum den irreduziblen Darstellungen der Gruppe entsprechen.

Über den letzten Punkt, also irreduzible Darstellungen von Gruppen, gibt es viele allgemeine mathematische Aussage:

1. **Diskrete Gruppen endlicher Ordnung** haben eine endliche Menge endlichdimensionaler Darstellungen und haben höchstens endliche Entartungen. Dabei gilt

$$\sum_{\text{Darstellungen}} (\text{Entartungen})^2 = \text{Ordnung} = \text{Anzahl der Gruppenelemente} .$$

2. **Kontinuierliche kompakte Gruppen** haben unendliche Mengen endlichdimensionaler Darstellungen.
3. Der Vollständigkeit wegen sei noch angemerkt, dass es auch **kontinuierliche nicht-kompakte Gruppen** gibt, diese sollen aber im Rahmen der Vorlesung nicht weiter behandelt werden.

Beispiel: Man betrachte etwa die Symmetrien der Kristalle und Moleküle. Eine diskrete Symmetrietransformation ist beispielsweise durch die Abbildungen $z \mapsto z$ und $z \mapsto -z$ gegeben. Bei einer Gruppe der Ordnung zwei gibt es zwei Darstellungen mit Dimension 1 und es gibt keine Entartung.

Beim Wasserstoffatom ohne externe Felder gibt es eine Drehsymmetrie, die durch die kontinuierliche kompakte Gruppe $\text{SO}(3)$ repräsentiert wird. Dabei gibt es $(2l + 1)$ -dimensionale Darstellungen für $l = 0, 1, 2, \dots$ mit $(2l + 1)$ -fachen Entartungen.

Innere Symmetrien finden sich auch in der Elementarteilchenphysik. So sind die drei Quarks u, d, s relativ leicht, sodass man eine Mischungssymmetrie zwischen ihnen betrachten kann. Dies führt ebenfalls auf die kontinuierliche kompakte Gruppe $\text{SU}(3)$, und man kann Darstellungen mit bestimmten Dimensionen finden.

Außerdem gibt es noch sogenannte **integrierbare Systeme**. In diese existieren so viele Symmetrien, dass es keinen Platz mehr für die Dynamik gibt. Darauf soll aber nicht weiter eingegangen werden.

2 Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden wir die mathematischen Begriffe einführen, welche zur Beschreibung von Symmetrien notwendig sind, also Gruppen. Besonderes Augenmerk ist dabei auf den Begriff der Lie-Gruppe zu legen, wo die Menge der Gruppenelemente zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Die zugehörige Lie-Algebra ermöglicht dann einen besonders eleganten Umgang mit den Elementen.

2.1 Diskrete Gruppen

DEFINITION 1: Eine **Gruppe** G ist eine Menge von Elementen g_1, g_2, \dots zusammen mit einer Verknüpfung „ $*$ “, kurz $(G, *)$ geschrieben, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. *Abgeschlossenheit*: $g_1, g_2 \in G$, dann ist auch $g_1 * g_2 \in G$.
2. *Assoziativität*: $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$.
3. *Einselement*: Es gibt ein $e \in G$, sodass $e * g = g * e = g$ für alle $g \in G$ gilt.
4. *Inverse Elemente*: Es gibt für alle $g \in G$ ein $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Die **Ordnung einer Gruppe**, durch $|G|$ notiert, entspricht der Anzahl der Elemente einer Gruppe.¹ Eine Gruppe heißt darüber hinaus **abelsch**, falls $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ gilt, andernfalls ist sie nicht abelsch.

DEFINITION 2: Eine Teilmenge $H \subset G$ einer Gruppe G heißt **Untergruppe**, wenn für zwei Elemente $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 * h_2 \in H$ liegt, sodass H selbst wieder eine Gruppe ist.

Eine Gruppe bzw. die Gruppenoperation kann man durch eine **Multiplikationstabelle** definieren. Für eine Gruppe der Ordnung 2, also die Menge $G = \{e, a\}$, gilt beispielsweise

	e	a
e	e	a
a	a	e

Diese spezielle Gruppe wird als \mathbb{Z}_2 bezeichnet. Dabei sind die beiden Elemente e und a lediglich Platzhalter für Objekte mit den in der Multiplikationstabelle spezifizierten Eigenschaften. Eine mögliche Realisierung dieser Gruppe wäre durch $e = 1$ und $a = -1$ zusammen mit der

¹Man kann die Ordnung einer Gruppe auch für unendliche Gruppen definieren, indem man Kardinalzahlen für Unendlichkeiten verwendet. Abzählbar unendliche Mengen (beispielsweise \mathbb{Z} oder \mathbb{Q}) werden mit \aleph_0 gekennzeichnet. Überabzählbare Mengen (etwa \mathbb{R} , S^1 , etc.) sind bijektiv auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (d.h. die Menge aller Teilmengen einer abzählbar unendlichen Menge) abbildbar, sie haben die Kardinalität \aleph_1 . Analog werden höhere Unendlichkeits-Kardinalitäten definiert, d.h. die Potenzmenge einer \aleph_n -Menge hat die nächsthöhere Kardinalität \aleph_{n+1} .

gewöhnlichen Multiplikation gegeben. Eine andere Realisierung ist durch Permutationen von zwei Elementen (genannt \mathfrak{S}_2) gegeben, in dem man

$$e = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{pmatrix}$$

setzt und als Gruppenoperator die Abbildungsverknüpfung \circ verwendet.

DEFINITION 3: Zwei Gruppen (G, \cdot) und $(G', *)$ heißen **isomorph**, in Zeichen $G \cong G'$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : G \rightarrow G'$ mit der Eigenschaft $f(g_1) * f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$ gibt.

Isomorphe Gruppen sind vom Verhalten ihrer Elemente identisch, wie etwa bei $\mathbb{Z}_2 \cong \mathfrak{S}_2$. Falls $f(g_1) * f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$ gilt, aber die Abbildung f nicht bijektiv ist, dann sind die Gruppen G und G' nur **homomorph**, aber nicht isomorph.

2.2 Kontinuierliche Gruppen

Die Anzahl der Gruppenelemente kann nun auch unendlich sein, wobei zwischen abzählbar (etwa \mathbb{Z} mit Addition) und überabzählbar (z.B. \mathbb{R} mit Addition) unendlich zu unterscheiden ist.

2.2.1 Kontinuierliche, Lie- und Matrix-Gruppen

Eine besonders elegant zu behandelnde Situation tritt ein, wenn die Gruppenelemente durch n reelle Koordinaten parametrisiert werden können, d.h. es handelt sich um eine kontinuierliche Gruppe der Dimension n , wo die Gruppe zugleich eine (topologische) Mannigfaltigkeit² ist. Die Elemente sind dann in der Form $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ darstellbar. Die Verknüpfung zweier Elemente lässt sich dann als

$$g(x) \cdot g(y) = g(z) \quad \text{mit} \quad z = f_1(x, y)$$

formulieren, die Inversenbildung eines Elements analog durch

$$[g(x)]^{-1} = g(w) \quad \text{mit} \quad w = f_2(x).$$

DEFINITION 4: Für eine **kontinuierliche Gruppe** verlangt man, dass die Funktionen f_1 und f_2 beide stetig sind.

DEFINITION 5: Sind die Funktionen f_1 und f_2 sogar analytisch (d.h. glatt und in eine Potenzreihe entwickelbar), so handelt es sich um eine **Lie-Gruppe**.

Im Rahmen der theoretischen Physik werden wir uns zumeist mit Lie-Gruppen zur Beschreibung der Symmetrien beschäftigen.

²Einen Raum mit einem Koordinatensystem nennt man eine **Mannigfaltigkeit**. Die Mannigfaltigkeit kann bestimmte Eigenschaften haben, d.h. zusammenhängend, einfach zusammenhängend, etc. sein und benötigt im Allgemeinen mehrere Koordinatensysteme für ihre vollständige Überdeckung (beispielsweise jeweils ein Koordinatensystem für die Nord- und Südhalbkugel einer Sphäre). Die Koordinaten sehen also nur *lokal* wie ein Teil des \mathbb{R}^n aus.

Beispiel: Wir betrachten einige verschiedene kontinuierliche Gruppen:

Gruppe	Verknüpfung	Dimension
• \mathbb{R}	+	1
• $\mathbb{R}^n = \{(r_1, \dots, r_n)\}$	+	n
• \mathbb{C}^n	+	$2n$
• $\mathbb{M}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} n \times n\text{-Matrizen mit} \\ \text{reellen Elementen} \end{array} \right\}$	+	n^2
• $\mathbb{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$	\cdot	1
• $\mathbb{T}^n = [\mathbb{U}(1)]^n = \mathbb{U}(1) \times \dots \times \mathbb{U}(1)$	\cdot (komponentenweise)	n

Für die Physik sind die sogenannten **Matrixgruppen** von großer Bedeutung, bei Ihnen entspricht die Gruppenverknüpfung immer der Matrizenmultiplikation. Wichtige Beispiele sind die Folgenden:

Gruppe	Dimension
• $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$	n^2
• $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$	$2n^2$
• $\mathbb{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$	$n^2 - 1$
• $\mathbb{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}$	$2(n^2 - 1)$

Bemerkung: Es gilt zwar $\dim \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) = \dim \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, aber die Koordinatenwahl ist deutlich schwieriger, da die Invertierbarkeitsbedingung $\det A \neq 0$ der $\mathbb{GL}(n)$ -Matrizen einen komplizierten Teil des \mathbb{R}^{n^2} ausschließt.

In der $\mathbb{SL}(n, \mathbb{C})$ wird die Dimension der Gruppe um 2 gegenüber $\dim \mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ reduziert, da man aus der einen Gleichung $\det A = 1$ zwei (reelle) Bedingungen $\Re(\det A) = 1$ und $\Im(\det A) = 0$ erhält.

2.2.2 Invarianzgruppen

Diese Matrixgruppen besitzen nun wieder Untergruppen, die ebenfalls eine wichtige physikalische Bedeutung tragen. Insbesondere der Fall der **Invarianzgruppen** hat einen besonderen Stellenwert. Wir betrachten ein allgemeines (unitäres) Skalarprodukt

$$(v, w) := \sum_{i,j=1}^n v_i^* \eta_{ij} w_j \quad \text{mit} \quad v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n,$$

wobei v_i^* einfach für die komplexe Konjugation steht. Für die Matrix A einer Invarianzgruppe wird nun verlangt, dass

$$(Av, Aw) = \sum_{i,j,k,l=1}^n A_{ij}^* v_j^* \eta_{ik} A_{kl} w_l \stackrel{!}{=} (v, w)$$

für beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt. Diese Bedingung lässt sich dann in

$$\sum_{i,k=1}^n A_{ij}^* \eta_{ik} A_{kl} = \eta_{jl}$$

für alle $j, l \in \{1, \dots, n\}$ umformulieren, sodass man in Matrixschreibweise die Invarianzforderung

$$A^\dagger \eta A = \eta$$

bekommt, wobei $A^\dagger := (A^*)^T$ die hermitesch konjugierte Matrix ist. Um den Namen „Invarianzgruppe“ zu rechtfertigen, sind noch die Gruppenaxiome nachzuprüfen, d.h. ob die Invarianzmatrizen auch eine Gruppe bilden:

1. *Abgeschlossenheit*: Es gelte $A^\dagger \eta A = \eta$ und $B^\dagger \eta B = \eta$ für zwei Matrizen, dann folgt

$$(AB)^\dagger \eta AB = B^\dagger A^\dagger \eta AB = B^\dagger \eta B = \eta .$$

2. *Assoziativität*: Folgt aus Assoziativität der Matrizenmultiplikation.
3. *Neutrales Element*: Betrachte $e = \mathbb{1}_n$, dann gilt trivialerweise $\mathbb{1} \eta \mathbb{1} = \eta$.
4. *Inverse Elemente*: Dazu betrachte die rechts-/linksseitige Multiplikation mit A^{-1} und $(A^{-1})^\dagger$, so folgt

$$A^\dagger \eta A = \eta \iff A^\dagger \eta = \eta A^{-1} \iff \eta = (A^{-1})^\dagger \eta (A^{-1}) ,$$

also erfüllt auch A^{-1} die Invarianzgleichung.

Beispiel: • $\mathbf{O}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) : \eta = \mathbb{1}_n\}$: Da die Matrizen reell sind gilt $A^* = A$ und damit $A^\dagger = A^T$, also lautet die Invarianzgleichung $A^T A = \mathbb{1}$ - dies sind gerade die **orthogonalen Matrizen**. Dabei ist $\mathbf{O}(n)$ eine Untergruppe von $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, denn es gilt

- a) $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = \mathbb{1}$, falls $A, B \in \mathbf{O}(n)$,
- b) $A^T A = \mathbb{1}$, d.h. $A^T = A^{-1}$ und damit $\mathbb{1} = (A^{-1})^T(A^{-1})$.

Es stellt sich nun die Frage, welche Dimension die Mannigfaltigkeit der orthogonalen Matrizen hat. Dazu betrachte die Invarianzgleichung $A^T A = \mathbb{1}$ komponentenweise, d.h.

$$(A^T A)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$$

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann erhalten wir für $i = j$ genau n Gleichungen und für das obere Dreieck $i > j$ entsprechend $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen. Für $i < j$ erhalten wir noch einmal dieselben Gleichungen, also effektiv nichts neues. Somit haben wir

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) - n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

unabhängige Parameter, und folglich gilt $\dim \mathbf{O}(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

- $\mathbf{SO}(n) = \{A \in \mathbf{O}(n) : \det A = 1\}$. Auch die $\mathbf{SO}(n)$ ist eine Untergruppe, denn es gilt
 - a) $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$,
 - b) $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} = 1$.

Um die Dimension der $\mathbf{SO}(n)$ zu bestimmen, betrachte man zuerst noch einmal die zugrundeliegende $\mathbf{O}(n)$. Wegen $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(A^T A) = \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2$ gilt $\det A = \pm 1$, d.h. die Menge der orthonalen Matrizen zerfällt in (mindestens) zwei Zusammenhangskomponenten. Die zusätzliche Bedingung $\det A = 1$ der $\mathbf{SO}(n) \subset \mathbf{O}(n)$ wählt somit nur eine der beiden Zusammenhangskomponenten aus, und damit folgt

$$\dim \mathbf{SO}(n) = \dim \mathbf{O}(n) = \frac{1}{2}n(n-1) .$$

- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \eta = \mathbb{1}_n\}$: Die Invarianzgleichung lautet hier $U^\dagger U = \mathbb{1}$, d.h. $U(n)$ ist die Menge der **unitären Matrizen**. Zur Bestimmung der Dimension der Mannigfaltigkeit geht man ähnlich wie bei den orthogonalen Matrizen vor, betrachtet also komponentenweise

$$(U^\dagger U)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ki}^* A_{kj} \stackrel{!}{=} \delta_{ij} .$$

Für die Diagonale $i = j$ erhält man n Gleichungen und für $i > j$ analog $\frac{1}{2}n(n-1)$. Wegen der zusätzlichen komplexen Konjugation liefert aber auch $i < j$ noch einmal $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen, sodass für Dimension folgt

$$\dim U(n) = 2n^2 - n - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 .$$

- $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$: In der $SU(n)$ kommt jetzt zur $U(n)$ noch die zusätzliche Bedingung $\det A = 1$ hinzu. Um die Dimension der $SU(n)$ zu bestimmen, beachte man, dass bereits für die unitären Matrizen $A \in U(n)$ die Gleichheit

$$\det(A^\dagger A) = \det A^\dagger \cdot \det A = \det A^* \cdot \det A = |\det A|^2 = 1 ,$$

also $|\det A| = 1$ gilt. Folglich bilden die Determinanten der unitären Matrizen einen (eindimensionalen) Kreis in der komplexen Ebene, der durch die zusätzliche $SU(n)$ -Forderung auf einen (nulldimensionalen) Punkt reduziert wird. Also folgt direkt

$$\dim SU(n) = \dim U(n) - 1 = n^2 - 1 .$$

- $O(3, 1) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) : \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)\}$: Diese spezielle Invarianzgruppe lässt das Skalarprodukt zur Minkowski-Matrix η invariant, d.h. das Lorentz-Skalarprodukt. Deshalb wird $O(3, 1)$ auch als **Lorentz-Gruppe** bezeichnet. Für die Dimension gilt

$$\dim O(3, 1) = \dim O(4) = 6 .$$

In Kapitel 4 ab Seite 50 gehen wir sehr detailliert auf diese spezielle Invarianzgruppe ein.

2.2.3 Die Gruppe $SO(2)$ und die Isomorphie $SO(2) \cong U(1)$:

Die Gruppen $SO(2)$ und $SU(2)$ sind in der Physik von immenser Wichtigkeit, genauso wie $SO(3)$ und $SU(3)$. Wir zeigen im Folgenden, dass die $SO(2)$ -Gruppe geometrisch der 1-Sphäre und die $SU(2)$ der 3-Sphäre entspricht.

DEFINITION 6: Die n -**Sphäre** ist durch $S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ definiert.

Die Gruppe $SO(2)$ ist durch $SO(2) = \{A \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R}) : A^T A = \mathbb{1}, \det A = 1\}$ definiert. Verwendet man nun die Benennung $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$ der vier Matrixelemente, dann führt die Eigenschaft $A^T A = \mathbb{1}$ einer orthogonalen Matrix wegen

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

und der Determinaten-Eigenschaft der $SO(2)$ zu den vier Bestimmungsgleichungen

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0 \quad \text{und} \quad ad - bc = 1.$$

Als nächstes wird nun eine Fallunterscheidung bezüglich des oberen linken Matrixelements a durchgeführt.

- $a \neq 0$: Dann gilt $ab + cd = 0 \iff b = -\frac{cd}{a}$. Damit folgt dann aus der Gleichheit

$$1 = ad - bc = ad + \frac{c^2d}{a} = \frac{d}{a}(a^2 + c^2) = \frac{d}{a} \iff a = d$$

direkt $b = -c$. Eine Parametrisierung aller $SO(2)$ -Matrizen mit $a \neq 0$ erfolgt also durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

- $a = 0$: In diesem Fall folgt sofort $c^2 = 1$ und $cd = 0$ und daraus $d = 0$, womit sich $-bc = 1$ und $b^2 = 1 = c^2$ ergibt. Daraus folgt dann $c = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{b} \cdot b^2 = -b$. Die Parametrisierung ist also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b^2 = 1.$$

Die allgemeine Parametrisierung der $SO(2)$ hat also die Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ und } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nun ist die $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1$ zu parametrisieren. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen und es gilt

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \stackrel{!}{=} 1 \quad \implies \quad |z|^2 = \pm(a^2 + b^2) \stackrel{!}{=} 1.$$

Wählt man nun die Variante mit positivem Vorzeichen, so haben beide Matrizen Gruppen (komplexe Zahlen sind 1×1 -Matrizen) die gleiche Parametrisierungsgleichung, die einem Kreis vom Radius 1 in der a - b -Ebene entspricht. Folglich müssen also beide Gruppen $SO(2) \cong U(1)$ sein.

2.2.4 Die Gruppe $SU(2)$

Wir wollen nun die Invarianzgruppe $SU(2)$ genauer betrachtet, d.h. die Menge der komplexen 2×2 -Matrizen mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$ und $\det U = 1$. Obwohl diese Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

durch acht reelle Parameter (vier komplexe Matrixelemente) gegeben sind, wissen wir aus den vorigen Überlegungen, dass $\dim SU(2) = 3$ gilt. Daher wollen wir noch einer sinnvollen Parametrisierung der $SU(2)$ suchen. Die Invarianzgleichung lautet explizit ausgeschrieben

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & a^*b + c^*d \\ b^*a + d^*c & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix},$$

zusammen mit $\det A = 1$ erhält man dann die vier unabhängigen Gleichungen

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad b^*a + d^*c = 0 \quad \text{und} \quad ad - bc = 1.$$

Um nun weiter vorzugehen, wird eine Fallunterscheidung bezüglich des Elements a durchgeführt:

- $a \neq 0$: Dann kann $b^* = -d^* \frac{c}{a}$ bzw. $b = -d \frac{c^*}{a^*}$ formuliert werden, und es folgt

$$ad - bc = \frac{d}{a^*} (|a|^2 + |c|^2) = \frac{d}{a^*} = 1 \quad \implies \quad d = a^* \quad \text{und} \quad b = -c^* ,$$

d.h. die Matrix A mit $a \neq 0$ lässt sich parametrisieren durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 .$$

- $a = 0$: Für den Fall dass das Matricelement a verschwindet, vereinfachen sich die expliziten Gleichungen zu

$$|c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 , \quad c^* d = 0 \quad \text{und} \quad -bc = 1 .$$

Aus $-bc = 1$ und $c^* d = 0$ folgt dann $d = 0$, also gilt $|b|^2 = |c|^2 = 1$. Dann können wir $c = -\frac{1}{b} = -\frac{bb^*}{b} = -b^*$ umschreiben, und erhalten so die Parametrisierung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |b|^2 = 1 .$$

Der Fall $a = 0$ hat also rein äußerlich die gleiche Parametrisierungsform, wie der Fall $a \neq 0$.

Schreiben wir nun $x_1 = \Re(a)$, $x_2 = \Im(a)$, $x_3 = \Re(b)$ und $x_4 = \Im(b)$, so erhalten wir schließlich die Parametrisierung

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 .$$

Damit kommen wir zu dem Ergebnis, dass die $SU(2)$ sich geometrisch bzw. topologisch wie eine S^3 verhält, d.h. sie ist zusammenhängend, einfach zusammenhängend, usw. Trivialerweise folgt aus der Definition, dass die $U(1)$ wie die S^1 ist.

Bemerkung: Die $SU(2)$ ist eigentlich dreidimensional, daher wäre es wünschenswert eine direkt Parametrisierung durch drei Variablen zu haben. Es ist daher zu zeigen, dass die Darstellung $A = \exp\left(\frac{i\theta^a \sigma^a}{2}\right) \in SU(2)$ mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

äquivalent zur Darstellung $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \in SU(2)$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ist. Die Pauli-Matrizen-Darstellung lässt sich in

$$\exp\left(\frac{i\theta^a \sigma^a}{2}\right) = \exp\left(\frac{i}{2}(\hat{n}\vec{\sigma})\right) \quad \text{mit} \quad \theta := |\vec{\theta}| \quad \text{und} \quad \hat{n} := \frac{\vec{\theta}}{\theta}$$

umschreiben. Die Exponentialfunktion der Matrix ist dabei wie üblich als Einsetzung in die entsprechende Taylor-Entwicklung $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ zu verstehen. Es zeigt sich nun

$$\begin{aligned} (\hat{n}\vec{\sigma})^2 &= (n_i \sigma^i)^2 = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} n_3^2 + (n_1 - in_2)(n_1 + in_2) & 0 \\ 0 & (n_1 + in_2)(n_1 - in_2) + n_3^2 \end{pmatrix} = |\hat{n}|^2 \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} , \end{aligned}$$

d.h. alle gerade Potenzen $(\hat{n}\vec{\sigma})^2$ sind gleich der Einheitsmatrix und damit gilt folglich für alle Potenzen

$$(\hat{n}\vec{\sigma})^k = \begin{cases} \hat{n}\vec{\sigma} & : k \text{ ungerade} \\ \mathbb{1} & : k \text{ gerade} \end{cases} .$$

Damit folgt dann für die Darstellung von $A \in \text{SU}(2)$

$$\begin{aligned} A &= \exp\left(i\frac{\theta}{2}(\hat{n}\vec{\sigma})\right) = \mathbb{1} + i\frac{\theta}{2}(\hat{n}\vec{\sigma}) + \frac{1}{2}\left(i\frac{\theta}{2}\right)^2(\hat{n}\vec{\sigma})^2 + \frac{1}{3!}\left(i\frac{\theta}{2}\right)^3(\hat{n}\vec{\sigma})^3 + \dots \\ &= \mathbb{1} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{2n!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n}}_{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + (\hat{n}\vec{\sigma}) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1}}_{i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (\hat{n}\vec{\sigma}) i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i n^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & (i n^1 + n^2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ (i n^1 - n^2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i n^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 , \end{aligned}$$

da $|\hat{n}|^2 = 1 = \cos^2 + \sin^2$ gilt.

Es zeigt sich, dass die S^1 und S^3 die einzigen Sphären sind, die als Gruppenmannigfaltigkeiten dienen können. Durch Produkte von 1-Sphären erhält man aber n -Tori \mathbb{T}^n , von denen jeder eine Gruppenstruktur erlaubt.

2.2.5 Lokale Äquivalenz von $\text{SU}(2)$ und $\text{SO}(3)$

Zwischen den Matrizen Gruppen $\text{SU}(2)$ und $\text{SO}(3)$ besteht eine lokale Verbindung, die wir noch kurz betrachten wollen. Dazu betrachten wir die Transformation

$$v \mapsto v' \quad \text{mit} \quad \sum_i v'_i \sigma_i = A \sum_j v_j \sigma_j A^\dagger ,$$

dann genügt es zu zeigen, dass $\sum_i v'_i w'_i = \sum_j v_j w_j$ gilt (diese Eigenschaft definiert orthogonale Transformationen aus der geometrischen Perspektive, da folglich beliebige Skalarprodukt - also Winkel und Abstände - erhalten bleiben). Dazu verwenden wir die Eigenschaft $\text{Sp}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$ der Pauli-Matrizen in der Rechnung

$$\begin{aligned} 2 \sum_j v'_j w'_j &= \sum_i \sum_j v'_i v'_j \text{Sp}(\sigma_i \sigma_j) = \text{Sp} \left(\sum_i \sum_j v'_i \sigma_i w'_j \sigma_j \right) \\ &= \text{Sp} \left(\sum_i v'_i \sigma_i \sum_j w'_j \sigma_j \right) = \text{Sp} \left(\left[A \sum_i v_i \sigma_i A^\dagger \right] \left[A \sum_j w_j \sigma_j A^\dagger \right] \right) \\ &= \sum_i \sum_j v_i w_j \text{Sp} \left(A \sigma_i A^\dagger A \sigma_j A^\dagger \right) = \sum_i \sum_j v_i w_j \text{Sp} \left(A \sigma_i \sigma_j A^\dagger \right) \\ &= \sum_i \sum_j v_i w_j \text{Sp} \left(\sigma_i \sigma_j A^\dagger A \right) = \sum_i \sum_j v_i w_j \text{Sp}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \sum_j v_j w_j . \end{aligned}$$

Damit wissen wir schonmal, dass die obige Transformation $v \mapsto v'$ durch eine orthogonale Abbildung beschrieben wird. Um die zugehörigen Matrixelemente zu bestimmen, verwendet man erneut die obige Pauli-Identität in

$$\begin{aligned} 2v'_i &= \sum_j v'_j 2\delta_{ij} = \sum_j v'_j \text{Sp}(\sigma_i \sigma_j) = \text{Sp} \left(\sum_j v'_j \sigma_i \sigma_j \right) = \text{Sp} \left(\sigma_i A \sum_j v_j \sigma_j A^\dagger \right) \\ &= \sum_j v_j \text{Sp} \left(\sigma_i A \sigma_j A^\dagger \right) \iff v'_i = \sum_j v_j \underbrace{\frac{1}{2} \text{Sp} \left(\sigma_i A \sigma_j A^\dagger \right)}_{R_{ij}} = \sum_j v_j R_{ij} . \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\det R = 1$ (!!!!!) Man erhält also eine Abbildung in der Form

$$\text{SU}(2) \longrightarrow \text{SO}(3) \quad A \mapsto R(A) = \left[R_{ij} := \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\sigma_i A \sigma_j A^\dagger \right) \right] ,$$

die allerdings keine Bijektion zwischen den beiden Gruppen liefert. Die Frage ist nun, wie sich diese lokale Äquivalenz interpretieren lässt. Zu jeder „Drehung“ der $\text{SU}(2)$ -invarianten Spin-Matrizen im Spinraum (bzw. Transformationsmatrix der $\text{SU}(2)$ -Gruppe) existiert eine zugehörige Drehung des Ortsvektors im Ortsraum (durch eine $\text{SO}(3)$ -Matrix beschrieben), welche dieselbe Transformation bewirkt.

2.3 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Wir wollen nun näher untersuchen, was Lie-Gruppen so besonders macht. Dazu betrachten wir wieder Invarianzgruppen mit der Eigenschaft $A^\dagger \eta A = \eta$ (und auch $\det A = 1$). Im Allgemeinen zerfällt eine Lie-Gruppe in mehrere Zusammenhangskomponenten, wir bezeichnen im Folgenden mit K diejenige Komponente, welche auch das Einselement enthält.

2.3.1 Exponentialdarstellung von Lie-Gruppen

SATZ 7: Jede Matrix $A \in K$ kann als

$$A = \exp \left(i \sum_{a=1}^{\dim} \theta^a T^a \right)$$

geschrieben werden, wobei $\theta^a \in \mathbb{R}$ reelle Parameter, \dim die Dimension der Gruppe und T^a die **Generatoren** sind, d.h. $n \times n$ -Matrizen mit der Eigenschaft $(T^a)^\dagger \eta - \eta T^a = 0$ (sowie $\text{Sp}(T^a) = 0$ falls $\det A = 1$). Die Exponentialfunktion der Matrix sei dabei durch die Einsetzung in die Taylor-Reihe definiert.

Der Kürze halber schreiben wir $\theta := \sum_a \theta^a T^a$ für die weitere Untersuchung des Satzes und definieren dann eine Abbildung $\mathbb{R}^{\dim} \longrightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ mit $\{\theta^a\} \mapsto \exp(i\theta)$.

- Um zu zeigen, dass $\exp(i\theta)$ tatsächlich ein Element von K liefert, definiere zwei Funktionen $f(\lambda) := \exp(i\lambda\theta)$ für $\lambda \in [0, 1]$ und $c(\lambda) := [f(\lambda)]^\dagger \eta [f(\lambda)]$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\lambda} c(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left[\exp(-i\lambda\theta^\dagger) \eta \exp(i\lambda\theta) \right] = -i \exp(-i\lambda\theta^\dagger) \underbrace{[\theta^\dagger \eta - \eta \theta]}_{0, \text{ n.V.}} \exp(i\lambda\theta) = 0 ,$$

also ist $c(\lambda)$ eine Konstante. Dann gilt aber $c(\lambda) = c(0) = \eta$ für alle $\lambda \in [0, 1]$, und damit muss folglich $f(\lambda) \in K$ liegen, da die geforderte Invarianzgleichung erfüllt ist. Um ggf. auch die Forderung nach $\det A = 1$ zu erfüllen, betrachte

$$\det[\exp(i\theta)] \stackrel{\star}{=} \prod_{i=1}^n \exp(i\lambda_i) = \exp\left(i \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \exp(i \operatorname{Sp}(\theta)) = 1$$

falls $\operatorname{Sp}(\theta) = 0$ ist. Dabei wird an der Stelle \star von der Diagonalisierung der Matrix θ ausgegangen, wobei die Aussage auch (allerdings nicht offensichtlich) für nichtdiagonalisierbare θ gilt. Außerdem bezeichnen die λ_i die Eigenwerte von θ .

- Der wesentlich problematischere Teil der Aussage des Satzes ist nun, ob denn auch jedes Gruppenelement $g \in K$ durch die angegebene Abbildung erreicht werden kann, d.h. in der Form $\exp(i\theta)$ geschrieben werden kann - d.h. ist die Abbildung surjektiv? Der Beweis soll an dieser Stelle nicht explizit ausgeführt werden, allerdings die grundlegende Idee. Aus dem Zusammenhang der Komponenten K folgt, dass für alle $g \in K$ eine stetige Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow K \quad \lambda \mapsto f(\lambda) \quad \text{mit} \quad f(0) = \mathbb{1}, \quad f(1) = g$$

existiert.³ Für $\lambda \ll 1$ lässt sich die Funktion mit $f(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda \cdot i\theta + \mathcal{O}(\lambda^2)$ entwickeln. Dann folgt aus der Invarianzgleichung

$$[f(\lambda)]^\dagger \eta [f(\lambda)] = \eta \quad \implies \quad \theta^\dagger \eta - \eta \theta = 0.$$

Da jedes θ ein lineares Objekt ist, kann es als Linearkombination der Basiselemente T^a geschrieben werden und es folgt dann direkt $(T^a)^\dagger \eta - \eta T^a = 0$. Andererseits kann $f(1) = g$ aber auch als eine Transformation betrachtet werden. Eine „große“ (endliche) Transformation kann dann durch mehrere „kleine“ (infinitesimale) Transformationen erreicht werden, sodass

$$g = f(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{N}\right) \right]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathbb{1} + \frac{i\theta}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right]^N = \exp(i\theta)$$

gilt. Damit sei an dieser Stelle genug gesagt - für die entsprechenden exakten Beweise siehe ein Mathematikbuch über Lie-Gruppen.

2.3.2 Lie-Algebren

Es ist nun viel einfacher die Matrizen $\theta = \sum_{a=1}^{\dim} \theta^a T^a$ statt der Gruppenelemente $g(\theta) \in K$ zu studieren, weil diese einen linearen Vektorraum bilden mit T^a als Basiselementen bilden.

DEFINITION 8: Wir bezeichnen den Vektorraum der Matrizen θ als **Lie-Algebra**, wobei wir

$$\text{Gruppe } \text{SU}(n) \quad \longrightarrow \quad \text{Algebra } \text{su}(n)$$

zur Notation verwenden.

³Man beachte, dass auf einer glatten Mannigfaltigkeit die Begriffe Wegzusammenhang (d.h. die Existenz eines stetigen Weges zwischen zwei Elementen) und Zusammenhang (keine Zerlegung in disjunkte offene Mengen möglich) identisch sind - für allgemeine topologische Räume ist die allerdings nicht der Fall.

Der Bezeichnung „Algebra“ in Lie-Algebra deutet darauf hin, dass man auch eine **Multiplikation** zweier Elemente der Lie-Algebra definieren kann, zusätzlich zur Addition. Diese wird von der Gruppenoperation der ursprünglichen Lie-Gruppe induziert. Dazu betrachten wir zwei Lie-Gruppen-Elemente

$$A := \exp(i\theta^a T^a) \quad \text{und} \quad B := \exp(i\varphi^a T^a),$$

wobei wir der Kürze halber ab jetzt die Einsteinsche Summenkonvention verwenden. Dann gehört das Produkt

$$A \cdot B = C := \exp(i\xi^a T^a)$$

ebenfalls zu K . Man beachte dabei, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, sodass im Allgemeinen nicht die triviale Multiplikationsregel $e^x e^y = e^z$ anwendbar ist. Wir betrachten unter Verwendung von

$$\begin{aligned} T^a T^b &= \frac{1}{2}\{T^a, T^b\} + \frac{1}{2}[T^a, T^b], & \xi^a \xi^b T^a T^b &= \frac{1}{2}\xi^a \xi^b \{T^a, T^b\} \quad \text{und} \\ 2\theta^a \varphi^b \{T^a, T^b\} &= (\theta^a \varphi^b + \theta^b \varphi^a) \{T^a, T^b\} \end{aligned}$$

daher eine explizite Reihenentwicklung von $A \cdot B$ bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbb{1} + i\theta^a T^a - \frac{1}{2}\theta^a \theta^b T^a T^b \right] \left[\mathbb{1} + i\varphi^a T^a - \frac{1}{2}\varphi^a \varphi^b T^a T^b \right] \\ &= \mathbb{1} + i(\theta^a + \varphi^a)T^a - \frac{1}{2}(\theta^a \theta^b + \varphi^a \varphi^b + 2\theta^a \varphi^b)T^a T^b \\ &= \mathbb{1} + i(\theta^a + \varphi^a)T^a - \frac{1}{4}(\theta^a + \varphi^a)(\theta^b + \varphi^b)\{T^a, T^b\} - \frac{1}{2}\theta^a \varphi^b [T^a, T^b] \\ &\stackrel{!}{=} \mathbb{1} + i\xi^a T^a - \frac{1}{2}\xi^a \xi^b T^a T^b + \mathcal{O}(\theta, \varphi, \xi)^3 \\ &= \mathbb{1} + i\xi^a T^a - \frac{1}{4}\xi^a \xi^b \{T^a, T^b\} + \mathcal{O}(\theta, \varphi, \xi)^3 \end{aligned}$$

Durch Vergleich der letzte und drittletzten Zeile wird sofort deutlich dass die Gleichheit formal nur dann erfüllt werden kann, wenn der Kommutator $\theta^a \varphi^b [T^a, T^b]$ in der drittletzten Zeile proportional zu $i\xi^a T^a$ ist. In allgemeinsten Formulierung müssen wir also

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

schreiben, wobei die f^{abc} die sogenannten **Strukturkonstanten** sind. Damit gilt für den letzten Summanden $-\frac{1}{2}\theta^a \varphi^b [T^a, T^b] = -\frac{i}{2} f^{abc} \theta^a \varphi^b T^c$ und insbesondere

$$\xi^a = \theta^a + \varphi^a - \frac{1}{2} f^{cba} \theta^c \varphi^b + \mathcal{O}(\theta, \varphi)^3.$$

FAZIT: Die Multiplikation in der Lie-Algebra wird durch den **Kommutator** $\theta \cdot \varphi := [\theta, \varphi]$ definiert, wobei die Strukturkonstanten f^{abc} bestimmen, was in der Vertauschung passiert. Die Strukturkonstanten sind dabei reell.

2.3.3 Eigenschaften der Generatoren und Strukturkonstanten

- Die **Multiplikation einer Lie-Algebra** hat im Allgemeinen die Eigenschaften

a) *Antisymmetrie*: $[X, Y] = -[Y, X]$

b) *Jacobi-Identität*: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

- Auch Linearkombinationen der Generatoren T^a können als Basis der Lie-Algebra dienen. Die Basis wird dabei orthogonal genannt, falls $\text{Sp}(T^a T^b) \propto \delta^{ab}$ gilt. In den meisten Fälle, beispielsweise bei den für uns wichtigen Lie-Gruppen $\text{U}(n)$, $\text{SU}(n)$, $\text{O}(n)$, $\text{SO}(n)$, etc., können die Generatoren auch so **normiert** werden, dass gilt

$$\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2} .$$

- Natürlich muss eine Basis der Lie-Algebra auch komplett sein, d.h. jedes Element der Algebra kann als Linearkombination der T^a geschrieben werden. Diese Forderung bzw. Voraussetzung führt zu einer **Vollständigkeitsrelation**.

Beispiel: Betrachten wir die Vollständigkeitsrelation für die $\text{SU}(n)$, also für die Generatoren T^a der $\mathfrak{su}(n)$, wobei $\mathfrak{su}(n)$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe $\text{SU}(n)$ bezeichnet. Wir zeigen zuerst, dass sich eine beliebige $n \times n$ -Matrix M als $M = \sum_{a=0}^{n^2-1} C^a T^a$ mit den Koeffizienten $C^a = 2 \text{Sp}(T^a M)$ schreiben lässt. Betrachte

$$\text{Sp}(T^b M) = C^a \cdot \text{Sp}(T^b T^a) = C^a \frac{\delta^{ba}}{2} = \frac{C^b}{2} ,$$

und damit folgt die Form der Koeffizienten. Um nun die Darstellbarkeit zu sehen, betrachte die folgende Zerlegung der Matrix M ,

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^\dagger) - \frac{1}{2n} \text{Sp}(M + M^\dagger) \mathbb{1}}_{\text{hermitesch, spurlos}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^\dagger) - \frac{1}{2n} \text{Sp}(M - M^\dagger) \mathbb{1}}_{\text{antihermitesch, spurlos}} \\ &\quad + \underbrace{1 \frac{1}{2n} [\text{Sp}(M + M^\dagger) + \text{Sp}(M - M^\dagger)] \mathbb{1}}_{\propto \mathbb{1}} , \end{aligned}$$

wobei $M_{\text{antiherm}} = iM_{\text{herm}}$ gilt, dann ergibt sich die Darstellbarkeit direkt aus den Eigenschaften der $\text{SU}(n)$ -Generatoren T^a (spurlos und selbstadjungiert). Unter Verwendung der eben hergeleiteten Darstellung der Matrix M und $T^0 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \mathbb{1}_n$ betrachte dann

$$\begin{aligned} \delta_{il} \delta_{jk} M_{lk} &= M_{ij} = C^a T_{ij}^a = C^0 T_{ij}^0 + C^A T_{ij}^A = 2 \text{Sp}(M) \frac{\delta_{ij}}{2n} + 2 \text{Sp}(T^A M) T_{ij}^A \\ &= \frac{1}{n} M_{nn} \delta_{ij} + 2 T_{kl}^A M_{lk} T_{ij}^A = \frac{1}{n} \delta_{kl} M_{lk} \delta_{ij} + 2 M_{lk} \\ &\iff \sum_{a=1}^{n^2-1} T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) , \end{aligned}$$

so erhalten wir die Vollständigkeitsrelation der $\mathfrak{su}(n)$ - bzw. $\text{SU}(n)$ -Generatoren.

- Aus der Orthonormierung $\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$ und dem Kommutator $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ lassen sich die Strukturkonstanten direkt durch

$$\begin{aligned} \text{Sp}([T^a, T^b] T^c) &= \text{Sp}(i f^{abc} T^c T^c) = i f^{abc} \frac{\delta^{cc}}{2} = \frac{i}{2} f^{abc} \\ \iff f^{abc} &= -2i \text{Sp}([T^a, T^b] T^c) \end{aligned}$$

ausdrücken. Um die totale Antisymmetrie von f^{abc} zu zeigen, betrachtet man das entsprechende Verhalten bei der Vertauschung $a \leftrightarrow b$, $a \leftrightarrow c$ und $b \leftrightarrow c$ durch explizites Nachrechnen:

$$a \leftrightarrow b: \quad f^{abc} = -2i \text{Sp}([T^a, T^b] T^c) = 2i \text{Sp}([T^b, T^a] T^c) = -f^{bac}$$

Für die verbleibenden beiden Vertauschungen beachte man, dass die Spur invariant unter zyklischer Vertauschung der Matrizen ist, d.h. es gilt $\text{Sp}(ABC) = \text{Sp}(BCA) = \text{Sp}(CAB)$ und analog für mehrere Matrizen - die folgt trivial aus der komponentenweisen Darstellung der Spur.

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow c: \quad f^{abc} &= -2i [\text{Sp}(T^a T^b T^c) - \text{Sp}(T^b T^a T^c)] \\ &= -2i [\text{Sp}(T^b T^c T^a) - \text{Sp}(T^c T^b T^a)] = 2i \text{Sp}([T^c, T^b] T^a) = -f^{cba} \\ b \leftrightarrow c: \quad f^{abc} &= -2i [\text{Sp}(T^a T^b T^c) - \text{Sp}(T^b T^a T^c)] \\ &= -2i [\text{Sp}(T^c T^a T^b) - \text{Sp}(T^a T^c T^b)] = 2i \text{Sp}([T^a, T^c] T^b) = -f^{acb} \end{aligned}$$

Aus der Jacobi-Identität $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ folgt dann einfach aus

$$\begin{aligned} 0 &= [[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] \\ &= i f^{abd} [T^d, T^c] + i f^{bcd} [T^d, T^a] + i f^{cad} [T^d, T^b] \\ &= -f^{abd} f^{dce} T^e - f^{bcd} f^{dae} T^e - f^{cad} f^{dbe} T^e \\ &= [f^{abd} f^{cde} + f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde}] T^e \end{aligned}$$

die Gleichheit

$$f^{abd} f^{cde} + f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} = 0 \quad (2.1)$$

mit $a, b, c, e = 1, \dots, \dim$ für die Strukturkonstanten.

- Falls es einen Generator gibt, der mit allen anderen Generatoren vertauscht, so haben wir ein **abelsche Unteralgebra** - ansonsten heißt die Algebra **halbeinfach**.

Beispiel: Betrachten wir die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ der $\text{SU}(2)$, welche dreidimensional ist. Mit den drei Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

können wir die Generatoren der $\text{SU}(2)$ bzw. Basiselemente der $\mathfrak{su}(2)$ durch $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ definieren. Diese erfüllen die Eigenschaften

$$\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}, \quad (T^a)^\dagger = T^a \quad \text{und} \quad \text{Sp}(T^a) = 0,$$

d.h. die Basis ist orthonormiert und die Generatoren sind hermitesch sowie spurlos. Explizites Nachrechnen liefert dann $[T^a, T^b] = i \epsilon^{abc} T^c$ für die Kommutatoren der Generatoren. Dabei ist ϵ^{abc} der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor, und die $\mathfrak{su}(2)$ -Lie-Algebra ist halbeinfach.

2.3.4 Zusatz: Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel

Wir haben bisher betrachtet, wie die Lie-Gruppen-Operation die Multiplikation in der zugehörigen Lie-Algebra induziert, d.h. die Vertauschungsrelationen und Strukturkonstanten bestimmt. Die offene Frage ist nun umgekehrt, wie bei bekannten Vertauschungsrelationen/Strukturkonstanten die Lie-Gruppen-Operation aussieht.

Die Antwort darauf liefert die **Campbell-Baker-Hausdorff-Formel**. Dazu betrachte zunächst ganz allgemein ein Produkt

$$e^{tX}e^{tY} = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n(X, Y)\right),$$

d.h. die Frage lautet, wie die Funktionen $C_n(X, Y)$ aussehen. Mit einer Taylorentwicklung der beiden Exponentialfunktionen auf der linken Seite, die wir in die Form

$$\begin{aligned} e^{tX}e^{tY} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} Y^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{n+m}}{n!m!} X^n Y^m \\ &\stackrel{\substack{s:=m+n \\ n=s-m}}{=} 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^s \frac{t^s}{m!(s-m)!} X^{s-m} Y^m \end{aligned}$$

schreiben können. Außerdem benötigen wir noch die Taylorentwicklung des natürlichen Logarithmus

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion. Betrachten wir dann die Ausdrücke bis zur dritten Ordnung in t :

$$\begin{aligned} z &= t(X+Y) + t^2\left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2\right) + t^3\left(\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{6}Y^3\right) + \dots \\ z^2 &= t^2(X^2 + XY + YX + Y^2) + t^3\left(\frac{1}{2}X^3 + X^2Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{2}YX^2\right. \\ &\quad \left.+ YXY + \frac{1}{2}Y^3 + \frac{1}{2}X^3 + XYX + \frac{1}{2}Y^2X + \frac{1}{2}X^2Y + XY^2 + \frac{1}{2}Y^3\right) + \dots \\ z^3 &= t^3(X^3 + X^2Y + XYX + XY^2 + YX^2 + YXY + Y^2X + Y^3) + \dots \end{aligned}$$

Betrachten wir dann die Summanden in der Logarithmus-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \implies z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} &= t(X+Y) \\ &+ t^2\left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}XY - \frac{1}{2}YX - \frac{1}{2}Y^2\right) \\ &+ t^3\left(\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{6}Y^3 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{4}X^2Y - \frac{3}{4}XY^2 - \frac{1}{2}Y^3\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{4}YX^2 - \frac{1}{2}YXY - \frac{1}{2}XYX - \frac{1}{2}Y^2X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2Y + \frac{1}{3}XY^2 + \frac{1}{3}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{3}YX^2 + \frac{1}{3}YXY + \frac{1}{3}XYX + \frac{1}{3}Y^2X\right). \end{aligned}$$

Folglich lauten die die ersten Entwicklungskoeffizienten des Produkts in kompakter Fassung

$$C_1(X, Y) = X + Y$$

$$C_2(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]$$

$$C_3(X, Y) = \frac{1}{2} \left([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]] \right)$$

Auch die höheren Koeffizienten $C_n(X, Y)$ für $n \geq 4$ lassen sich eindeutig durch die Kommutatoren ausdrücken, und damit haben wir das Produkt durch die Kommutatoren ausgedrückt, die wiederum durch die Strukturkonstanten definiert sind.

3 Darstellungstheorie

3.1 Allgemeines

Wir haben die Invarianzgruppen, d.h. $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, etc., durch die Eigenschaften einer Transformation der Form $v \mapsto Av$ definiert, wobei im Allgemeinen $v \in \mathbb{C}^n$ ist. Es stellt sich nun die Frage, wie man eine derart abstrakt definierte Gruppe auch tatsächlich realisieren kann. Eine solche Realisierung der Gruppenstruktur durch derartige Transformationen eines Vektorraums wird **Darstellung** genannt, und zwar im konkreten Fall **definierende** bzw. **fundamentale Darstellung**. Es gibt aber auch noch viele andere Darstellungen.

3.1.1 Definition von Darstellungen

DEFINITION 9: Ein **Vektorraum** ist ein linearer Raum, d.h. für $v, w \in V$ liegen auch alle (komplexen) Linearkombinationen $\alpha v + \beta w \in V$. Die Vektoren v_1, \dots, v_k heißen **linear unabhängig**, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \quad \implies \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 .$$

Die **Dimension** d des Vektorraums gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren an. Jeder Vektor $v \in V$ kann dann als $v = \sum_{i=1}^d v_i \hat{e}_i$ geschrieben werden, wobei die \hat{e}_i **Basisvektoren** sind und $v_i \in \mathbb{C}$ die Komponenten des Vektors in dieser speziellen Basis ist.

DEFINITION 10: Eine **lineare Abbildung** $L : V \longrightarrow V$ erhält die Struktur des Vektorraums auf dem sie operiert, d.h. es gilt

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w) .$$

Falls eine inverse lineare Abbildung L^{-1} existiert, so bilden diese Abbildungen eine Gruppe mit der Multiplikation $(L_1 \cdot L_2)v := L_1(L_2(v))$. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $GL(V)$ bzw. $GL(d, \mathbb{C})$, oder auch einfach als **lineare invertierbare Operatoren auf V** .

Mit den genannten Eigenschaften lässt sich nun

$$L(v) = L \left(\sum_{i=1}^d v_i \hat{e}_i \right) = \sum_{i=1}^d v_i L(\hat{e}_i) = \sum_{i=1}^d v_i \left(\sum_{j=1}^d \hat{e}_j L_{ji} \right) = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d L_{ji} v_i \right) \hat{e}_j$$

darstellen, d.h. die komplexen Zahlen L_{ji} bilden eine Matrix in dieser gewählten Basis, welche die lineare Abbildung darstellt.

DEFINITION 11: Eine (lineare) **Darstellung** der Gruppe G ist ein Homomorphismus der Form $\mathcal{D} : G \longrightarrow GL(V)$, d.h. $\mathcal{D}(g) \in GL(V)$ und $\mathcal{D}(g_1 \cdot g_2) = \mathcal{D}(g_1) \cdot \mathcal{D}(g_2)$. Die **Dimension der Darstellung** ist die Dimension des Vektorraums d .

Bemerkung: Man beachte, dass die Dimension d der Darstellung (d.h. die Dimension des Vektorraums V) unabhängig von der Ordnung n der zugrundeliegenden $\mathrm{GL}(n)$ ist. Für die fundamentale Darstellung gilt aber immer $d = n$, deshalb wird die fundamentale Darstellung auch manchmal einfach als \mathfrak{n} bezeichnet. Dazu gibt es noch eine dritte Dimensionsgröße \dim , welche die Anzahl der Koordinaten angibt.

Beispiel: • Die $\mathrm{SO}(3)$ ist eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, also ist $n = 3$. Die Mannigfaltigkeit der $\mathrm{SO}(3)$ ist 3-dimensional, also gilt $\dim = 3$.

- Die $\mathrm{SU}(3)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$, also wieder $n = 3$. Da die Gruppenmannigfaltigkeit der $\mathrm{SU}(3)$ aber 8-dimensional ist, folgt $\dim = 8$.

Die Größe \dim entspricht somit auch immer der Anzahl der nötigen Generatoren für die Exponential-Repräsentation der Gruppe.

Bemerkung: Eine fundamentale Darstellung \mathfrak{n} einer Matrizengruppe kann man folglich auch als Inklusion in die zugehörige $\mathrm{GL}(n)$ auffassen.

3.1.2 Wichtige spezielle Darstellungen

- *Konjugierte Darstellung:* Für die konjugierte Darstellung (von komplex konjugiert) gilt ebenfalls $d = n$, aber $\mathcal{D}_*(g) = g^*$, d.h. g wird komplex konjugiert. Trivialerweise gilt

$$\mathcal{D}_*(g_1 \cdot g_2) = (g_1 \cdot g_2)^* = g_1^* \cdot g_2^* = \mathcal{D}_*(g_1) \cdot \mathcal{D}_*(g_2) ,$$

d.h. \mathcal{D}_* ist in der Tat ein Homomorphismus. Die konjugierte Darstellung wird oft einfach als \mathfrak{n}^* oder $\bar{\mathfrak{n}}$ bezeichnet. Die Generatoren dieser Darstellung sind durch

$$[\exp(i\theta^a T^a)]^* = \exp(-i\theta^a (T^a)^*) \implies \mathcal{D}(T^a) = -(T^a)^*$$

gegeben. Ähnlich folgt aus $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ dann $[(-T^a)^*, (-T^b)^*] = if^{abc}(-T^c)^*$, d.h. die Strukturkonstanten sind unabhängig von der Darstellung.

- *Adjungierte Darstellung:* In der adjungierten Darstellung gilt $d = \dim$. Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Basisvektoren von V die Matrizen T^a sind. Ein „Vektor“ aus V lässt sich also als $v = \sum_{a=1}^{\dim} v^a T^a$ mit $v^a \in \mathbb{R}$ darstellen. Die adjungierte Darstellung wird als

$$v' = [\mathcal{D}_{\mathrm{adj}}(g)](v) = gvg^{-1}$$

definiert. Diese Abbildung ist linear, also $[\mathcal{D}_{\mathrm{adj}}(g)](v+w) = [\mathcal{D}_{\mathrm{adj}}(g)](v) + [\mathcal{D}_{\mathrm{adj}}(g)](w)$ und bijektiv, da $v = g^{-1}v'g$ nach entsprechender Links-/Rechts-Multiplikation gilt.

Wir schon in Satz 7 von Seite 11 formuliert, erfüllen die Generatoren T^a die Eigenschaft $(T^a)^\dagger \eta - \eta T^a = 0 \iff (T^a)^\dagger = \eta T^a \eta^{-1}$, die sich aus der ursprünglichen Invarianzgleichung ergibt. Trivialerweise erfüllen dann auch die Linearkombinationen $v = v^a T^a$ die Gleichung $v^\dagger = \eta T^a \eta^{-1}$. Im Gegensatz zur fundamentalen und konjugierten Darstellung ist es aber bei der adjungierten Darstellung nicht sofort offensichtlich, dass auch die dargestellten Elemente v' diese Invarianzgleichung erfüllen, daher betrachte

$$\begin{aligned} v'^\dagger &= (gvg^{-1})^\dagger = \eta g v g^{-1} \eta^{-1} \iff (g^{-1})^\dagger v^\dagger g^\dagger = \eta g v g^{-1} \eta^{-1} \\ &\iff v^\dagger g^\dagger = g^\dagger \eta g v g^{-1} \eta^{-1} \iff v^\dagger = \eta v g^{-1} \eta^{-1} (g^{-1})^\dagger = \eta v \eta^{-1} . \end{aligned}$$

Betrachten wir eine „kleine“ Transformation, d.h. $g = \exp(i\theta^a T^a)$ mit $\theta^a \ll 1$, so gilt

$$v' = (v')^b T^b \quad \text{mit} \quad (v')^b = v^b + i\theta^a (F^a)^{bc} v^c + \mathcal{O}(\theta^2) .$$

wobei die F^a die Generatoren der adjungierten Darstellung sind. Um diese zu bestimmen verende man die Reihenentwicklung und infinitesimale Näherung

$$g = \exp \left(-i \sum_{a=1}^{\dim} \theta^a T^a \right) \approx \mathbb{1} - i \sum_{a=1}^{\dim} \theta^a T^a$$

der Gruppenelemente, dann folgt andererseits die Gleichheit

$$\begin{aligned} v^b T^b + i\theta^a (F^a)^{bc} v^c T^b &= v^b T^b = v' = g^{-1} v g \approx (1 + i\theta^a T^a) v (1 - i\theta^a T^a) \\ &= v + i\theta^a [T^a, v] = v^b T^b + i\theta^a v^b [T^a, T^b] \\ \implies \theta^a v^b \underbrace{[T^a, T^b]}_{if^{abc} T^c} &= \theta^a v^b (F^a)^{cb} T^c , \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich dann $(F^a)^{bc} = -if^{abc}$ bei Beachtung der Antisymmetrie von f^{abc} . Um schließlich die Gleichheit $[F^a, F^b] = if^{abc} F^c$ zu zeigen, betrachte man den Kommutator komponentenweise. Es gilt unter Verwendung der Strukturkonstanten-Relation (2.1) und dem vorigen Ergebnis dann

$$\begin{aligned} [F^a, F^b]^{ik} &= (F^a)^{ij} (F^b)^{jk} - (F^b)^{ij} (F^a)^{jk} = (-if^{aij})(-if^{bjk}) - (-if^{bij})(-if^{ajk}) \\ &= -f^{aij} f^{bjk} + f^{bij} f^{ajk} = f^{baj} f^{ijk} = -f^{abj} f^{ijk} = f^{abi} f^{ijk} \end{aligned}$$

also folgt $[F^a, F^b] = if^{abc} F^c$.

Beispiel: Wir wollen die fundamentale und adjungierte Darstellung der $SU(n)$ zur Veranschaulichung des zuvor eingeführten Materials genauer betrachten. Eine interessante Größe der Generatoren ist die sogenannte **quadratische Casimir-Konstante** C_F , die durch

$$\sum_{a=1}^{\dim} (T^a T^a)_{AB} = C \delta_{AB}$$

definiert ist. Wie schon zu zuvor, sind die $SU(n)$ -Generatoren abstrakt durch eine Reihe von Eigenschaften spezifiziert: Es gilt $(T^a)^\dagger = T^a$ sowie $\text{Sp}(T^a) = 0$ für alle $a = 1, \dots, n^2 - 1$. Außerdem sind sie durch $\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ normiert.

- *Fundamentale $SU(n)$ -Darstellung:* Die fundamentale Darstellung der $SU(n)$ hat die Dimension $d_F = n$, die Normierungskonstante für eine allgemeine Normierung der Form

$$\text{Sp}(T^a T^b) = T \delta^{ab}$$

entspricht $T_F = \frac{1}{2}$. Zur Bestimmung der quadratischen Casimir-Konstante betrachte unter Verwendung der $SU(n)$ -Vollständigkeitsrelation von Seite 14 die Gleichheit

$$\begin{aligned} T_{ik}^a T_{kj}^a &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} \delta_{kk} - \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{kj} \right) = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} \text{Sp}(\mathbb{1}_n) - \frac{1}{n} \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(n - \frac{1}{n} \right) = \frac{n^2 - 1}{2n} \delta_{ij} , \end{aligned}$$

also gilt $C_F = \frac{n^2 - 1}{2n}$.

- *Adjungierte $SU(n)$ -Darstellung:* Die Dimension der adjungierten Darstellung ist durch $d_A = n^2 - 1$ gegeben. Die explizite Berechnung der Normierungskonstante gestaltet sich durch

$$\begin{aligned}
 T_F \delta^{ab} &\stackrel{!}{=} \text{Sp}(F^a F^b) = F_{cd}^a F_{dc}^b \stackrel{*}{=} -f^{acd} f^{bcd} = f^{acd} f^{bcd} = f^{acd} f^{bce} \delta^{de} \\
 &= f^{acd} f^{bce} \cdot 2 \text{Sp}(T^d T^e) = 2 \text{Sp}(\underbrace{f^{acd} T^d}_{-i[T^a, T^c]} \cdot \underbrace{f^{bce} T^e}_{-i[T^b, T^c]}) = -2 \text{Sp}([T^a, T^c] \cdot [T^b, T^c]) \\
 &= -2 \text{Sp}(T^a T^c T^b T^c + T^c T^a T^c T^b - T^a T^c T^c T^b - T^c T^a T^b T^c) \\
 &= -4 T_{jk}^a T_{kl}^c T_{lm}^b T_{mj}^c + 2 T_{jk}^a T_{kl}^c T_{lm}^b T_{mj}^c + 2 T_{ik}^b T_{kl}^c T_{lm}^a T_{mj}^c \\
 &= -2 \left(\delta_{kj} \delta_{lm} - \frac{1}{n} \delta_{kl} \delta_{mj} \right) T_{jk}^a T_{lm}^b + (T_{jk}^a T_{mj}^b + T_{jk}^b T_{mj}^a) \left(\delta_{km} \delta_{ll} - \frac{1}{n} \delta_{kl} \delta_{lm} \right) \\
 &= -2 \delta_{kj} \delta_{lm} T_{jk}^a T_{lm}^b + \frac{2}{n} \delta_{kl} \delta_{mj} T_{jk}^a T_{lm}^b \\
 &\quad + n \delta_{km} T_{jk}^a T_{mj}^b + n \delta_{km} T_{jk}^b T_{mj}^c - \frac{1}{n} \delta_{km} T_{jk}^a T_{mj}^b - \frac{1}{n} \delta_{km} T_{jk}^b T_{mj}^c \\
 &= \frac{2}{n} \underbrace{T_{jl}^a T_{lj}^b}_{\frac{1}{2} \delta^{ab}} + 2n \underbrace{T_{jn}^a T_{nj}^b}_{\frac{1}{2} \delta^{ab}} - \frac{2}{n} \underbrace{T_{jl}^a T_{lj}^b}_{\frac{1}{2} \delta^{ab}} = n \delta^{ab} .
 \end{aligned}$$

ein wenig umständlich, aber es folgt so $T_A = n$. Zur Berechnung der quadratischen Casimir-Konstante C_A betrachte dann noch (unter Verwendung der vorigen langen Rechnung ab dem zweiten Gleichheitszeichen)

$$T_{jk}^a T_{kl}^a = -f^{ajk} f^{akl} = f^{jak} f^{lak} \stackrel{*}{=} n \delta_{jl} ,$$

d.h. wir erhalten $C_A = n$ für die adjungierte $SU(n)$ -Darstellung.

3.1.3 Ähnlichkeitstransformationen, treue und unitäre Darstellungen

DEFINITION 12: Zwei Darstellung \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 heißen **äquivalent**, falls es eine lineare invertierbare Abbildung (Isomorphismus) S zwischen ihnen gibt (Ähnlichkeits- bzw. Similaritätstransformation), sodass

$$\mathcal{D}_2(g) = S \mathcal{D}_1(g) S^{-1}$$

für alle Gruppenelemente g erfüllt ist.

In diesem Fall handelt es sich im Wesentlichen um einen einfachen Basiswechsel, denn es gilt

$$\mathcal{D}_2(g) S = S \mathcal{D}_1(g) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{S} & \\ V_1 & & V_2 \\ & \xleftarrow{S^{-1}} & \\ \mathcal{D}_1 \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}_2 \\ & \xrightarrow{S} & \\ V_1 & & V_2 \\ & \xleftarrow{S^{-1}} & \end{array} & \\ \end{array}$$

Inbesondere gilt dann der Zusammenhang $T_2^a = S T_1^a S^{-1}$ mit $a = 1, \dots, \dim$ für die Generatoren der beiden Darstellungen.

Beispiel: Um die Äquivalenz der fundamentalen Darstellung \mathcal{D} und der konjugierten Darstellung \mathcal{D}^* der $\mathrm{SU}(2)$ zu zeigen, muss eine Ähnlichkeitstransformation S gefunden werden, so dass $S\mathcal{D}(g)S^{-1} = \mathcal{D}_*(g)$ gilt. Ein Element der Lie-Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ können wir in der Pauli-Parametrisierung durch $g = \exp(i\theta^a \frac{\sigma^a}{2})$ darstellen (vgl. Seite 9). Betrachten wir die folgenden Produkte der Pauli-Matrizen

$$\sigma^2 \sigma^1 \sigma^2 = -\sigma^1 \quad \sigma^2 \sigma^2 \sigma^2 = \sigma^2 \quad \sigma^2 \sigma^3 \sigma^2 = -\sigma^3$$

sowie die Wirkung der komplexen Konjugation auf die Pauli-Matrizen

$$(\sigma^1)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* = \sigma^1 \quad (\sigma^2)^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^* = -\sigma^2 \quad (\sigma^3)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^* = \sigma^3 .$$

Folglich kann als Ähnlichkeitstransformation $S = \sigma^2$ gewählt werden, denn es gilt $(\sigma^2)^2 = \mathbb{1}$, also folgt schließlich

$$S\mathcal{D}(g)S^{-1} = \sigma^2 \exp\left(i\theta^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \sigma^2 = \exp\left(-i\theta^a \frac{(\sigma^a)^*}{2}\right) = \mathcal{D}_*(g) .$$

Damit erhalten wir die gewünschte Ähnlichkeit $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}^*$.

DEFINITION 13: Als **Kern** einer Darstellung definiere $\ker(\mathcal{D}) = \{g \in G : \mathcal{D}(g) = \mathbb{1}_d\}$. Falls $\ker(\mathcal{D}) = \{e\}$ gilt, so heißt die Darstellung **treu**.

Für eine treue Darstellung gilt insbesondere, dass aus $g_1 \neq g_2$ auch $\mathcal{D}(g_1) \neq \mathcal{D}(g_2)$, d.h. ungleiche Gruppenelemente werden auch entsprechend auf ungleiche Elemente der Darstellungen abgebildet. Um dies einzusehen, vermute $\mathcal{D}(g_1) = \mathcal{D}(g_2)$. Dann folgt mit den Eigenschaften eines Homomorphismus

$$\mathcal{D}(g_1 g_2^{-1}) = \mathcal{D}(g_1) \mathcal{D}(g_2^{-1}) = \mathcal{D}(g_2) \mathcal{D}(g_2^{-1}) = \mathcal{D}(g_2 g_2^{-1}) = \mathcal{D}(e) = \mathbb{1} ,$$

also gilt $g_1 g_2^{-1} = e$, und dies führt schließlich zu $g_1 = g_2$.

DEFINITION 14: Falls die Darstellungsmatrizen $\mathcal{D}(g) \in \mathrm{GL}(V)$ unitär sind, so heißt die Darstellung **unitär** - die Gruppe G selbst braucht dazu allerdings nicht unbedingt unitär zu sein.

Man kann in der Tat für alle *endlichen diskreten* und alle *kompakten kontinuierlichen* Gruppen ein positiv definites Skalarprodukt wählen, sodass \mathcal{D} unitär ist. Um dies zu sehen, betrachte das gewöhnliche (unitäre) Standardskalarprodukt $\langle v|w \rangle = \sum_{i=1}^d v_i^* w_i$. Damit definiere

$$\langle\langle v|w \rangle\rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathcal{D}(g)v | \mathcal{D}(g)w \rangle$$

als weiteres Skalarprodukt, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle\langle v | \mathcal{D}^\dagger(g') \mathcal{D}(g) w \rangle\rangle &= \langle\langle \mathcal{D}(g') v | \mathcal{D}(g) w \rangle\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g') v | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g') w \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathcal{D}(gg') v | \mathcal{D}(gg') w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g'' \in G} \langle \mathcal{D}(g'') v | \mathcal{D}(g'') w \rangle = \langle\langle v | w \rangle\rangle , \end{aligned}$$

also folgt die Unitaritätsgleichung $\mathcal{D}^\dagger(g') \mathcal{D}(g') = \mathbb{1}$ für die Darstellungsmatrizen. Im Folgenden werden wir nun zumeist unitäre Darstellungen betrachten. Die Generatoren sind dann also hermitesch.

3.1.4 Summen und Produkte von Darstellungen

Wichtige algebraische Konstruktionen von Vektorräumen sind direkte Summe \oplus und das direkte Produkt \otimes . Diese Begriffe kann man auch auf Darstellungen übertragen:

- *Direkte Summe:* Seien \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 zwei Darstellungen der Gruppe G in den Vektorräumen V_1 und V_2 . Durch Bildung der direkten Summe $V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2) : v_i \in V_i\}$ mit $(v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2)$, kommt man zu einer neuer Darstellung von G :

$$[\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2(g)](v_1, v_2) := (\mathcal{D}_1(g)v_1, 0) + (0, \mathcal{D}_2(g)v_2) .$$

Als Basisvektoren können $\{(\hat{e}_i, 0)\}$ zusammen mit $\{(0, \hat{e}_j)\}$ gewählt werden, sodass

$$(v, v') = \left(\sum_{i=1}^{d_1} v_i \hat{e}_i, \sum_{j=1}^{d_2} v'_j \hat{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{d_1} v_i (\hat{e}_i, 0) + \sum_{j=1}^{d_2} v'_j (0, \hat{e}_j)$$

gilt. Die Dimension der Summe-Darstellung ist daher $d_{\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2} = d_1 + d_2$. Insbesondere ist in dieser Basis die Darstellung blockdiagonal gemäß

$$\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{D}_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{D}_2 \end{array} \right) .$$

DEFINITION 15: Eine Darstellung ist **irreduzibel**, wenn es keine invarianten Unterräume¹ gibt. Eine Darstellung ist **vollreduzibel**, wenn \mathcal{D} äquivalent zu einer Zerlegung $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots$ mit jeweils irreduziblen \mathcal{D}_i ist.

- *Direktes Produkt:* Durch Bildung des direkten Produkts $V_1 \otimes V_2 = \{(v_1, v_2) : v_i \in V_i\}$ der Vektorräume V_1 und V_2 mit der Bilinearität

$$\begin{aligned} (\alpha_1 v_1 + \beta_1 w_1, v_2) &= \alpha_1 (v_1, v_2) + \beta_1 (w_1, v_2) & \text{und} \\ (v_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2) &= \alpha_2 (v_1, v_2) + \beta_2 (v_1, w_2) \end{aligned}$$

gelangt man zum direkten Produkt von Darstellungen, welches durch

$$[\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2(g)](v_1, v_2) := (\mathcal{D}_1(g)v_1, \mathcal{D}_2(g)v_2)$$

definiert ist. Als Basisvektoren können hier alle Kombinationen $\{(\hat{e}_i, \hat{e}_j)\}$ dienen, d.h.

$$(v, v') = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} v_i v'_j (\hat{e}_i, \hat{e}_j) .$$

Die Dimension einer Produkt-Darstellung ist folglich auch das Produkt $d_{\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2} = d_1 \cdot d_2$.

Eine sehr entscheidende Fragestellung ist das sogenannte **Problem der Ausreduktion**, d.h. die Möglichkeit das direkte Produkt $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$ als direkte Summe gemäß

$$\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_a \oplus \mathcal{D}_b \oplus \mathcal{D}_c \oplus \dots$$

zu zerlegen. Mit anderen Worten besteht also die problematische Aufgabe darin, alle invarianten Unterräume von $V_1 \otimes V_2$ zu finden. Wir kommen in den Abschnitten 3.4, 3.5 und 5.2 darauf zurück.

¹Ist $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus (d.h. eine lineare Selbstabbildung), so bezeichnet man einen Unterraum $W \subset V$ als **invariant**, wenn $f(W) \subset W$ gilt. Mit anderen Worten liefert die Abbildungs-Einschränkung $f|_W : W \rightarrow f(W) \subset W$ einen Endomorphismus auf W .

3.2 Gewichte und Wurzeln

Das Ziel der nächsten Abschnitte soll nun sein, alle mögliche (unitären) Darstellungen einer Gruppe G zu klassifizieren. Einige Kennzeichen von Darstellungen kennen wir schon, etwa die Dimension der Darstellung d , die quadratische Casimir-Konstante C und den Normierungsfaktor T der Generatoren. Allgemein reichen diese Eigenschaften einer Darstellung aber noch nicht zu einer eindeutigen Klassifizierung aus.

Andererseits sind aber aus der gewöhnlichen Quantenmechanik schon Beispiele für die Klassifizierung von Darstellungen der $SU(2)$ (stellt den Spin dar) bzw. $SO(3)$ (für Drehungen) bekannt. Dort gibt es die Quantenzahlen $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ für den Spin oder $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ für den Drehimpuls. Die Dimension des Vektorraums ist dann durch $d = 2s + 1$ bzw. $d = 2\ell + 1$ gegeben,² während die quadratische Casimir-Konstante $C = s(s + 1)$ bzw. $C = \ell(\ell + 1)$ ist. Alle diese Begriffe sind prinzipiell also schon länger bekannt, auch wenn sie bisher nicht so benannt wurden.

Es gilt jetzt also, die beispielhaften Größen s bzw. ℓ auf beliebige andere Gruppen zu verallgemeinern, wobei wir unsere Betrachtung auf Lie-Gruppen beschränken. Wir wissen schon, genügt es dazu, die zugehörigen Lie-Algebren zu untersuchen.

3.2.1 Die maximal kommutative Cartan-Unteralgebra

Es seien nun T^a die Generatoren der fundamentalen Darstellung, F^a die Generatoren der adjungierten Darstellung und $\mathcal{D}(T^a)$ die Generatoren einer beliebigen dritten Darstellung \mathcal{D} . Wir diagonalisieren nun *gleichzeitig* so viele der T^a -Matrizen, wie maximal möglich ist und bezeichnen diese Matrizen mit H_i für $i = 1, \dots, m$, wobei m der Rang der Gruppe G ist.

Da die fundamentalen Generatoren T^a hermitesch sind (wir betrachte unitäre Darstellungen), müssen die Matrizen H_i folglich reell sein.³ Da die H_i nun diagonale Matrizen sind, entspricht die Matrizenmultiplikation zwischen Ihnen der gewöhnlichen kommutativen Multiplikation reeller Zahlen, d.h. es folgt insbesondere $[H_i, H_j] = 0$.

DEFINITION 16: Die diagonalisierten Matrizen H_i spannen die maximale abelsche/kommutative Unteralgebra, genannt **Cartan-Unteralgebra**, auf.

Die Cartan-Unteralgebra wird also von der maximal gleichzeitig diagonalisierbaren Anzahl an Generatoren der fundamentalen Darstellung aufgespannt. Aus $[H_i, H_j] = 0$ folgt dann insbesondere auch $[\mathcal{D}(H_i), \mathcal{D}(H_j)] = 0$ in der beliebig gewählten Darstellung, denn mit der Homomorphismus-Eigenschaft von \mathcal{D} gilt

$$[\mathcal{D}(H_i), \mathcal{D}(H_j)] = \mathcal{D}(H_i H_j) - \mathcal{D}(H_j H_i) = 0 .$$

Beispiel: Wir betrachten die $SU(3)$, deren fundamentale Generatoren T^a wegen $(T^a)^\dagger = T^a$ hermitesch, durch $\text{Sp}(T^a) = 0$ spurlos und gemäß $\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$ orthonormiert sind. Oftmals

²Man betrachte etwa, dass (bei naiver nicht-relativistischer Betrachtung) ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermion durch einen zwei-komponentigen Spinor beschrieben wird - im Rahmen der speziell-relativistischen Quantenmechanik erhält man stattdessen vierkomponentige Spinoren, da auch Antiteilchen berücksichtigt werden müssen.

³Hermitesche Matrizen haben stets nur reelle Eigenwerte. Um dies zu sehen, sei $|a\rangle$ ein normierter Eigenvektor zu $U = U^\dagger$, d.h. es gelte $\langle a|a\rangle = 1$ und $U|a\rangle = \alpha|a\rangle$, dann folgt

$$\alpha = \langle a|\alpha|a\rangle = \langle a|U|a\rangle = \langle a|U^\dagger|a\rangle = \langle a|U|a\rangle^* = \langle a|\alpha|a\rangle^* = \alpha^* .$$

verwendet man dann die **Gell-Mann-Matrizen**

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Generatoren der $SU(3)$. Eine mögliche Wahl für die aufspannenden, gleichzeitig diagonalisierten Matrizen der Cartan-Unteralgebra sind dann

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

d.h. wir wählen λ_3 sowie λ_8 und es gilt $m = \text{Rang}(G) = 2$. Von den $\dim SU(3) = 3^2 - 1 = 8$ Generatoren der $SU(3)$ sind somit noch sechs nichtdiagonale übrig.

3.2.2 Gewichte

In einer allgemeinen Darstellung \mathcal{D} sind die Darstellungen $\mathcal{D}(H_i)$ der Generatoren der Cartan-Unteralgebra mit $i = 1, \dots, m$ gewöhnliche $d \times d$ -Matrizen. Weil sie diagonal sind, finden man triviale Eigenvektoren beispielsweise durch die Standard-Einheitsvektoren des \mathbb{R}^d :

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Die Eigenvektoren spannen zugleich den Darstellungsraum auf.

DEFINITION 17: Die zur Matrix $\mathcal{D}(H_i)$ gehörenden Eigenwerte (im oberen Beispiel etwa b_i) werden **Gewichte** w_i genannt,

$$\mathcal{D}(H_i)v = w_i v,$$

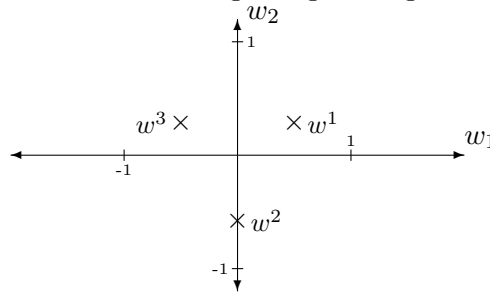
wobei der Index die Matrix $\mathcal{D}(H_i)$ durchnummeriert.

Da es m solche Matrizen gibt, erhält man zu jedem Eigenvektor v entsprechend m Gewichte w_1, \dots, w_m , die man der Kürze halber zu einem **Gewichtsvektor** $w = (w_1, \dots, w_m)$ zusammenfasst. Da die Darstellungsmatrizen $\mathcal{D}(H_i)$ außerdem d -dimensional sind, gibt es d Eigenvektoren, sodass man entsprechend auch d solche Gewichtsvektoren erhält. Man kann diese d Gewichtsvektoren dann in einem m -dimensionalen Raum grafisch darstellen.

Beispiel: Betrachten wir die fundamentale Darstellung $\mathfrak{3}$ der $SU(3)$, dann kennen wir aus dem vorigen Beispiel bereits die Generatoren H_i der Cartan-Unteralgebra. Folglich lassen sich die Gewichtsvektoren direkt an den Diagonalelementen der beiden Matrizen ablesen, sodass wir

$$w^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad w^3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad w^2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

als Gewichtsvektoren erhalten - diese wurden dabei in absteigender Reihenfolge der ersten Komponente geordnet (man beachte, dass der hochgestellte Index und die Reihenfolge nicht übereinstimmen, der Index gibt die Position des zugehörigen Diagonalelements der Matrix an).



Es gilt nun insbesondere $|w^1|^2 = |w^2|^2 = |w^3|^2 = \frac{1}{3}$ und $w^i \cdot w^j = -\frac{1}{6}$, wie man durch kurzes Nachrechnen schnell nachprüft.

Man kann der Größe nach die Gewichte ordnen (wie im vorigen Beispiel bereits durchgeführt). Eine **Ordnungsrelation** $w^i > w^j$ der Gewichtsvektoren ist beispielsweise dadurch gegeben, dass die erste nichtverschwindende Komponente im Differenzvektor $w^i - w^j$ positiv ist - dies ist aber nur eine Konvention. Mit ihr folgt im vorigen Beispiel dann $w^1 > w^2 > w^3$.

Eine offene Frage ist noch, wie diese neuen Gewichte zu interpretieren sind. Physikalisch bestimmen gleichzeitig diagonalisierbare Operatoren (also H_1, \dots, H_m) die gleichzeitig messbaren Eigenschaften eines System, wobei die Eigenwert-Vektoren (Gewichtsvektoren) w^k die möglichen Messwerte beinhalten. Die Entartung entspricht dann der Dimension der Darstellung d . Die quantenmechanischen Wellenfunktionen operieren im Darstellungsraum.

3.2.3 Wurzeln

Als nächstes müssen wir uns um die verbleibenden, nicht-diagonalisierten Generatoren kümmern, die wir mit E_α bezeichnen. Diese sind noch unbestimmten Generatoren in Form von $n \times n$ -Matrizen der fundamentalen Darstellung.

DEFINITION 18: Durch (komplexe) Linearkombinationen der Generatoren T^a können wir erreichen, dass die Menge der E_α insofern „diagonalisiert“ ist, dass die Vertauschungsrelation

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m$$

erfüllt ist. Die „Eigenwerte“ α_i heißen **Wurzeln**, und man bildet analog zu den Gewichten entsprechende m -Komponentige **Wurzelvektoren** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Es gibt $(\dim - m)$ nichtverschwindende Wurzelvektoren dieser Art.

Bemerkung: In der adjungierten Darstellung gilt $\mathcal{D}_{\text{adj}}(T^a) = F^a$ für die Generatoren. Damit folgt

$$\mathcal{D}_{\text{adj}}(T^a)v = F^a v = T^b (F^a)^{bc} v^c = -i f^{abc} T^b v^c = i f^{abc} v^b T^c = v^b [T^a, T^b] = [T^a, v],$$

d.h. es gilt $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \iff \mathcal{D}_{\text{adj}}(H_i)E_\alpha = \alpha_i E_\alpha$. Also sind die *Wurzeln die Gewichte der adjungierten Darstellung*. Folglich sind die Wurzeln $\alpha_i \in \mathbb{R}$, da alle Gewichte reell sind.

Man beachte unter Verwendung von H_i diagonal und reell sowie $\alpha_i \in \mathbb{R}$, dass die Generatoren E_α nicht unbedingt hermitesch sind:

$$\alpha_i E_\alpha^\dagger = (H_i E_\alpha - E_\alpha H_i)^\dagger = E_\alpha^\dagger H_i - H_i E_\alpha^\dagger = -[H_i, E_\alpha^\dagger] \iff [H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger,$$

ist also α_i eine Wurzel, so ist auch $-\alpha_i$ eine Wurzel. Die **Normierung der E_α -Generatoren** wird ebenfalls durch $\text{Sp}(E_\alpha E_\beta^\dagger) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}$ bestimmt.

Beispiel: Betrachten wir als Beispiel wieder die $\text{SU}(3)$, so verbleiben noch die sechs nicht-diagonalisierten Matrizen

$$\{E_\alpha\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

mit $k \neq l$. Für den Kommutator mit den Generatoren der Cartan-Unteralgebra gilt dann

$$\begin{aligned} [H_i, E_\alpha]_{mn} &= (H_i)_{mj} (E_\alpha)_{jn} - (E_\alpha)_{mj} (H_i)_{jn} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{(H_i)_{mj} \delta_{jk} \delta_{nl}}_{(H_i)_{mm} \delta_{mj}} - \delta_{nk} \delta_{jl} \underbrace{(H_i)_{jn}}_{(H_i)_{nn} \delta_{jn}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [(H_i)_{kk} - (H_i)_{ll}] \delta_{mk} \delta_{nl} \\ &= [(H_i)_{kk} - (H_i)_{ll}] (E_\alpha)_{mn} = \alpha_i (E_\alpha)_{mn}, \end{aligned}$$

d.h. der geklammerte Teil gibt die Wurzeln der $\text{SU}(3)$ an.

3.2.4 Zusammenhang von Wurzeln und Gewichten

Die nicht-diagonalisierten Generatoren E_α haben wichtige Eigenschaften. Es sei v wieder ein Basis-(Eigen-)Vektor im Darstellungsraum, sodass $\mathcal{D}(H_i)v = w_i v$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(H_i)\mathcal{D}(E_\alpha)v &= \mathcal{D}([H_i, E_\alpha])v + \mathcal{D}(E_\alpha)\mathcal{D}(H_i)v \\ &= \alpha_i \mathcal{D}(E_\alpha)v + w_i \mathcal{D}(E_\alpha)v = (w_i + \alpha_i) \mathcal{D}(E_\alpha)v, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{D}(E_\alpha)v$ ist ebenfalls ein geeigneter Basisvektor und insbesondere $w_i + \alpha_i$ ein Gewicht (falls der Vektor $\mathcal{D}(E_\alpha)v \neq 0$ ist). Analog zeigt man die Aussage für $\mathcal{D}(E_\alpha^\dagger)$, also ist auch $w_i - \alpha_i$ ein Gewicht (ebenfalls nur wenn $\mathcal{D}(E_\alpha^\dagger)v \neq 0$ gilt).

FAZIT: Mit den Darstellungen der Generatoren E_α lassen sich also die übrigen Basisvektoren konstruieren.

Umgekehrt seien jetzt $w^k = (w_1^k, \dots, w_m^k)$ für $k = 1, \dots, d$ die Gewichtsvektoren. Dann sind die Wurzelvektoren von der Form $\pm(w^k - w^l)$, wobei ihre Anzahl der Dimension der adjungierten Darstellung entspricht, d.h. der Dimension \dim der Gruppe. Genau m dieser Vektoren verschwinden aber, da $[H_i, H_j] = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, m$ gilt.

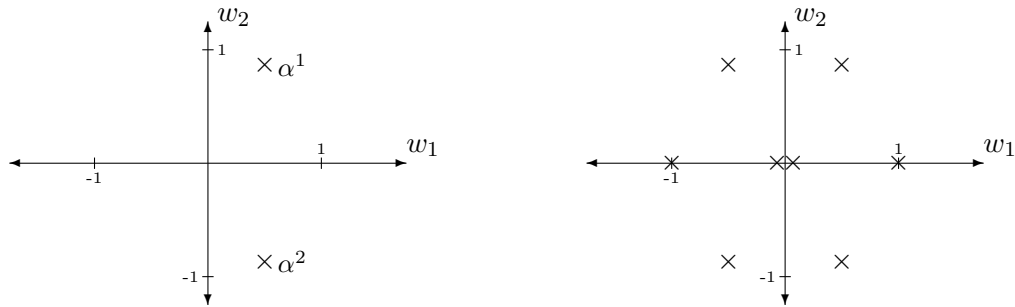
DEFINITION 19: Wir unterscheiden nun zwei Arten von Wurzeln:

- Die **positiven Wurzeln** $\alpha = w^k - w^l$ mit $k < l$ (für die Ordnung $w^1 > w^2 > \dots$).
- Die **einfachen Wurzeln** sind positiv und können *nicht* als Summe zweier anderer positiver Wurzeln geschrieben werden - sie sind also linear unabhängig. Offensichtlich sind sie eine Teilmenge von $\{\alpha^i\} = \{w^i - w^{i+1}\}$, wobei es genau m viele gibt.

Beispiel: Wir betrachten wieder die $SU(3)$ in der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{3}$. Da die $SU(3)$ den Rang $m = 2$ hat gibt es zwei einfache positive Wurzeln, die sich mittels der bereits bekannten Gewichtsvektoren direkt durch

$$\alpha^1 = w^1 - w^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \alpha^2 = w^2 - w^3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

darstellen lassen. Für diese beiden Wurzeln gilt dann außerdem $|\alpha^1|^2 = |\alpha^2|^2 = 1$ und das Skalarprodukt ist $\alpha^1 \cdot \alpha^2 = -\frac{1}{2}$.



3.3 Klassifikation von Darstellungen

Alle notwendigen Bausteine zur Klassifikation von Darstellungen stehen nun zur Verfügung:

- *Cartan-Unteralgebra:* H_i für $i = 1, \dots, m$
- *d-dimensionale Darstellung \mathcal{D} :* $\mathcal{D}(H_i)$ als $d \times d$ -Matrizen, die auf der „Wellenfunktion“ $v \in \mathbb{C}^d$ operieren.
- *Gewichte:* m -dimensionale Vektoren $w^j \in \mathbb{R}^m$ für $j = 1, \dots, d$, welche die physikalischen Zustände angeben.
- *Wurzeln:* m -dimensionale Vektoren $\alpha^{\tilde{k}} \in \mathbb{R}^m$ mit $\tilde{k} = 1, \dots, \dim$.
- *Einfache positive Wurzeln:* α^k für $k = 1, \dots, m$, die eine praktische Basis des \mathbb{R}^m liefern.
- Die Matrizen $\mathcal{D}(E_\alpha)$ und $\mathcal{D}(E_{-\alpha})$ bringen uns via $w \rightarrow w + \alpha$ bzw. $w \rightarrow w - \alpha$ von einem Gewicht zum anderen.

Wir haben auf den Gewichten einen Ordnungsrelation $w^1 > w^2 > \dots > w^d$ eingeführt und wissen, dass wir mit $\mathcal{D}(E_\alpha)$ für $\alpha > 0$ zum nächsten Gewicht gelangen. Da es aber nur d Gewichte gibt, muss die Anwendung von $\mathcal{D}(E_\alpha)$ auf das **höchste Gewicht** w^1 gleich Null sein. Für eine gegebene Ordnungsrelation ist das höchste Gewicht w^1 immer eindeutig bestimmt.

3.3.1 Klassifikation endlichdimensionaler irreduzibler unitärer Darstellungen

Das höchste Gewicht zusammen mit einer sogenannten Hauptformel (auf die gehen wir später genauer ein) führt dann zu einer eindeutigen Klassifikation irreduzibler Darstellung.

SATZ 20 (Hauptformel): Für jede Wurzel α und jedes Gewicht w gilt

$$\frac{2\alpha \cdot w}{|\alpha|^2} = q - p,$$

wobei $p = 0, 1, 2, \dots$ die Anzahl der verbleibenden Operationen mit $\mathcal{D}(E_\alpha)$ angibt, bei denen das Ergebnis noch nicht verschwindet. Analog ist q die Anzahl der verbleibenden Operationen mit $\mathcal{D}(E_{-\alpha})$, bei denen wir noch nicht Null erhalten.

Eine Herleitung der Hauptformel wird in Abschnitt 3.3.3 gegeben. Für das höchste Gewicht w^1 ist mit beliebigem α^k für $k = 1, \dots, m$ stets $p = 0$. Daher ist w^1 vollständig und eindeutig durch die Projektionen

$$q^k = \frac{2\alpha^k \cdot w^1}{|\alpha^k|^2} \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad q^k = 0, 1, 2, \dots$$

bestimmt, wobei die entsprechende Darstellung als (q^1, \dots, q^m) bezeichnet wird. Alle anderen Gewichte können dann vom höchsten Gewicht aus durch Anwendung der Operation $\mathcal{D}(E_{-\alpha})$ erreicht werden.

Um die explizite Konstruktion des höchsten Gewichts zu vereinfachen, bietet es sich an selbiges als $w^1 = \sum_{k=1}^m q^k \mu^k$ zu schreiben, wobei die **fundamentalen Gewichte** μ^k zuerst durch die Gleichungen

$$\frac{2\alpha^k \cdot \mu^l}{|\alpha^k|^2} = \delta^{kl} \quad \text{für} \quad k, l = 1, \dots, m$$

zu bestimmen sind (auf diese Bestimmungsgleichung der μ^k gelangt man direkt durch Einsetzen der w^1 - μ^k -Zerlegung in die Hauptformel).

Beispiel: Wenden wir dies wieder auf die $SU(3)$ an. Dort hatten wir bereits die beiden Wurzeln

$$\alpha^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

bestimmt, wobei $|\alpha^1|^2 = |\alpha^2|^2 = 1$ gilt, sodass sich die Bestimmungsgleichungen zu $\alpha^k \cdot \mu^l = \frac{1}{2} \delta^{kl}$ vereinfachen. Betrachten wir dann explizit

- $l = 1$: Bezeichne $\mu^1 = (a, b)$, dann erhält man für die beiden Gleichungen

$$k = 1 : \quad a + \sqrt{3}b = 1 \quad \text{und} \quad k = 2 : \quad a - \sqrt{3}b = 0 ,$$

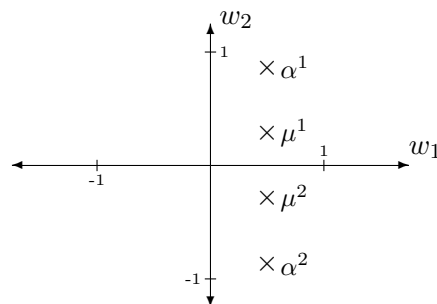
die man problemlos zu $\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$ auflöst.

- $l = 2$: Bezeichne $\mu^2 = (c, d)$, dann gilt analog

$$k = 1 : \quad c + \sqrt{3}d = 0 \quad \text{und} \quad k = 2 : \quad c - \sqrt{3}d = 1 ,$$

und erhält damit $\mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$.

Damit haben wir die beiden Fundamentalgewichte μ^1 und μ^2 aus den bekannten Wurzeln bestimmt. Diese kann man wieder grafisch darstellen:



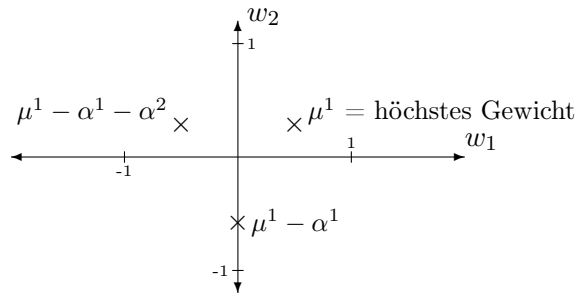
Wir man anhand der bisher gezeigten Grafiken der Wurzeln und Gewichte der $SU(3)$ -Darstellung bereits vermuten kann, sind alle Darstellungen „symmetrisch“ in der w_1 - w_2 -Ebene. Für die (komplex) konjugierte Darstellung der $SU(3)$ gilt insbesondere $(q^1, q^2)^* = (q^2, q^1)$ - dies folgt direkt aus der geometrischen Form der Gewichtsdiagramme, während die Dimension der Darstellung (q^1, q^2) durch

$$d = \frac{(q^1 + 1)(q^2 + 1)(q^1 + q^2 + 2)}{2} \tag{3.2}$$

gegeben ist. Diese Gleichung beweisen wird später in 3.5.4 als Anwendung der tensoriellen Ausreduktion.

3.3.2 Explizite Darstellungen der $SU(3)$

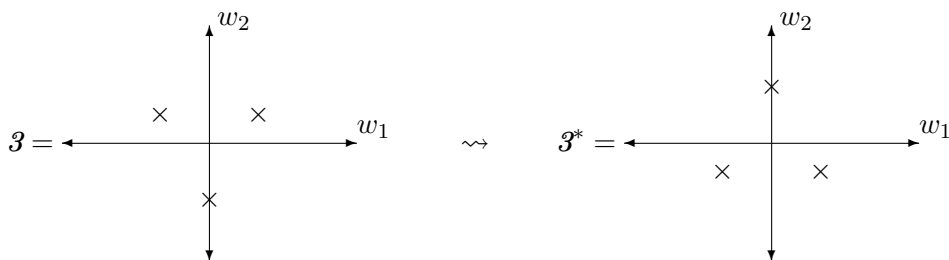
- $(1, 0)$: Dies ist die **fundamentale Darstellung $\mathfrak{3}$** der $SU(3)$. Wegen $(1, 0)$ dürfen wir einmal mit α^1 nach unten, aber nicht mit α^2 . Die Dimension dieser Darstellung ist $d = 3$, das zugehörige Gewichtsdiagramm hat die folgende Form:



- $(0, 1)$: Die **konjugierte Darstellung $\mathfrak{3}^*$** ergibt sich aus der Darstellung $\mathfrak{3}$. Die Gewichte sind durch die Eigenwertgleichungen $\mathcal{D}(H_i)v = w_i v$ bestimmt. Dabei gilt $\mathcal{D}(H_i) = H_i$ in der fundamentalen Darstellung. In der konjugierten Darstellung betrachtete dagegen

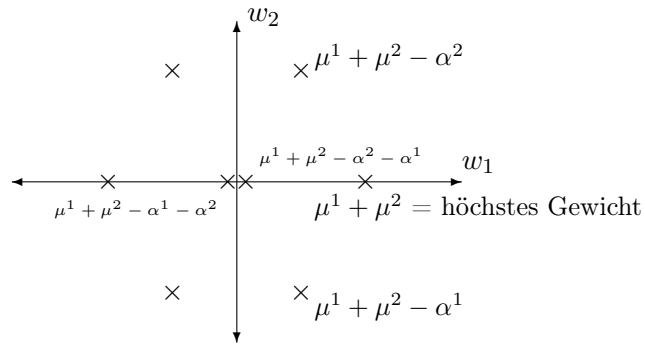
$$g^* = \exp(i\theta^a T^a)^* = \exp(-i\theta^a (T^a)^*) ,$$

d.h. es gilt $\mathcal{D}_*(T^a) = -(T^a)^*$. Da die H_i reell sind, folgt damit dann $\mathcal{D}_*(H_i) = -H_i$, d.h. die Generatoren der kommutativen Cartan-Unteralgebra wechseln ihr Vorzeichen und damit auch die zugehörigen Gewichte. Für das zugehörige Gewichtsdiagramm gilt dann:



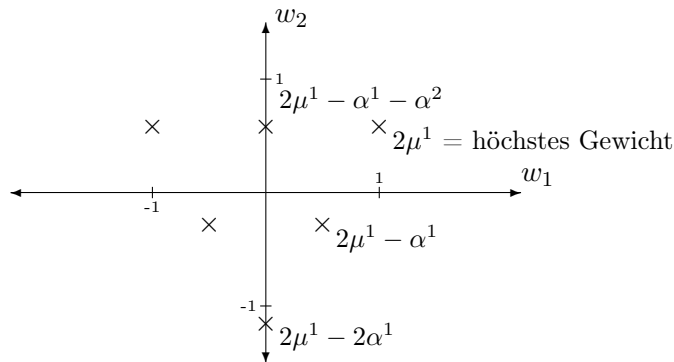
Man erhält also in der konjugierten Darstellung $\mathfrak{3}^*$ der $SU(3)$ ein gespiegeltes Gewichtsdiagramm der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{3}$.

- $(1, 1)$: Die **adjungierten Darstellung** der $SU(3)$ hat die Darstellungsdimension $d = 8$. Wir können wegen $(1, 1)$ jeweils mit α^1 und α^2 einmal nach unten, die linke Seite der folgenden Darstellung ergibt sich dann durch Symmetrie:

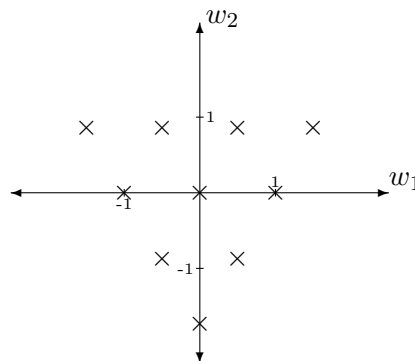


Physikalisch ist diese Darstellung der $SU(3)$ von besonderer Bedeutung, da sie den sogenannten **achtfachen Weg** der Quark-Zusammensetzung der Mesonen vorhersagt, für nähere Details siehe Seite 45.

- $(2, 0)$: In dieser 6-dimensionalen Darstellung **6** der $SU(3)$ können wir mit α^2 nichts machen, dafür aber bis zu zweimal mit α^1 nach unten gehen. Wiederum folgt die linke Seite des Diagramms durch Symmetrie:



- $(3, 0)$: Zuletzt betrachten wir noch die 10-dimensionale Darstellung **10**, wobei aus Platzgründen auf Beschriften verzichtet wird:



Qualitativ zeigt sich also die gleiche Dreiecksstruktur, wie schon bei $(1, 0)$ und $(2, 0)$, entsprechend setzt sich diese auch für Darstellungen der Form $(n, 0)$ fort.

Analog kann man dann auch „höhere“ Darstellungen mit den zugehörigen Gewichtsdiagrammen nach demselben Schema konstruieren. Man beachte aber, dass es anders als bei der $SU(2)$ keine Darstellungen der $SU(3)$ in jeder Dimension gibt. Dazu betrachte man die bereits genannte $SU(3)$ -Dimensionsformel (3.2), aus der hervorgeht, dass es beispielsweise keine Darstellung mit $d = 2$ gibt.

3.3.3 Zusatz: Herleitung der Hauptformel

Es soll nun die Hauptformel von Seite 28 hergeleitet werden, dazu gehen wir schrittweise vor.

1. Wir bezeichnen den Vektor v mit den Gewichten w_i , d.h. $\mathcal{D}(H_i)v = w_iv$, jetzt mit $|w\rangle$.
Wir wissen bereits, dass

$$\mathcal{D}(E_\alpha)|w\rangle \propto |w + \alpha\rangle \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(E_{-\alpha})|w\rangle = \mathcal{D}(E_\alpha^\dagger)|w\rangle \propto |w - \alpha\rangle$$

ist. Mit $N_{\pm\alpha,w}$ seien die zugehörigen Faktoren bzw. Normierungskonstanten bezeichnet, sodass kurz $\mathcal{D}(E_{\pm\alpha})|w\rangle = N_{\pm\alpha,w}|w \pm \alpha\rangle$ gilt.

2. Die Schreibweise $\langle w|w\rangle$ suggeriert bereits, dass es sich hierbei um das Skalarprodukt im Darstellungsvektorraum handelt. Für die Normierungsfaktoren können wir damit die Gleichheit (beachte $\mathcal{D}(E_{-\alpha}) = \mathcal{D}(E_\alpha^\dagger) = \mathcal{D}(E_\alpha)^\dagger$)

$$\begin{aligned} N_{-\alpha,w} &= \langle w - \alpha | \mathcal{D}(E_{-\alpha}) | w \rangle = \langle w - \alpha | \mathcal{D}(E_\alpha)^\dagger | w \rangle \\ &= \langle w | \mathcal{D}(E_\alpha) | w - \alpha \rangle^* = N_{\alpha,w-\alpha}^* \end{aligned} \tag{3.3}$$

herleiten, die wir später noch an mehreren Stellen verwenden werden.

3. Weiter benötigen wir eine wichtige Eigenschaft des Kommutators $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$, die wir aus der Jacobi-Identität

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \iff [X, [Y, Z]] = [Y, [X, Z]] - [Z, [X, Y]]$$

erhalten. Es gilt nun für alle $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} [H_i, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] &= [E_\alpha, [H_i, E_{-\alpha}]] - [E_{-\alpha}, [H_i, E_\alpha]] \\ &= -\alpha[E_\alpha, E_{-\alpha}] - \alpha[E_{-\alpha}, E_\alpha] = 0, \end{aligned}$$

d.h. der Kommutator $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ vertauscht mit den Generatoren der kommutativen Cartan-Unteralgebra. Folglich muss aber $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ dann selbst ein Element der Cartan-Unteralgebra sein, sodass wir es als

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{j=1}^m \beta_j H_j$$

schreiben können, wobei die Koeffizienten β_j noch unbekannt sind.

4. Um diesen Umstand abzuhefen, betrachte unter Verwendung der zyklischen Vertauschungsinvarianz der Spur die Gleichheit

$$\begin{aligned} \beta_i &= 2 \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{\delta^{ij}}{2} = 2 \sum_{j=1}^m \beta_j \text{Sp}(H_i H_j) = 2 \text{Sp} \left(H_i \sum_{j=1}^m \beta_j H_j \right) \\ &= 2 \text{Sp} (H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = 2 \text{Sp} (H_i E_\alpha E_{-\alpha} - H_i E_{-\alpha} E_\alpha) \\ &= 2 \text{Sp} (E_{-\alpha} H_i E_\alpha - E_{-\alpha} E_\alpha H_i) = 2 \text{Sp} (E_{-\alpha} [H_i, E_\alpha]) = 2\alpha_i \underbrace{\text{Sp}(E_\alpha^\dagger E_\alpha)}_{\frac{\delta^{\alpha\alpha}}{2}} = \alpha_i, \end{aligned}$$

also sind die Linearkoeffizienten des Kommutator $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ durch die Wurzeln α_i gegeben, sprich es gilt

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{j=1}^m \alpha_j H_j .$$

5. Diese Beziehung gilt dann natürlich auch für die entsprechenden Darstellungsmatrizen, womit wir dann die Gleichheit

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot w &\stackrel{\star}{=} \left\langle w \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathcal{D}(H_j) \right| w \right\rangle = \langle w | [\mathcal{D}(E_\alpha), \mathcal{D}(E_{-\alpha})] | w \rangle & (3.4) \\
 &= \langle w | \mathcal{D}(E_\alpha) \mathcal{D}(E_{-\alpha}) | w \rangle - \langle w | \mathcal{D}(E_{-\alpha}) \mathcal{D}(E_\alpha) | w \rangle = |\mathcal{D}(E_\alpha)^\dagger | w \rangle|^2 - |\mathcal{D}(E_\alpha) | w \rangle|^2 \\
 &= |N_{-\alpha, w}|^2 - |N_{\alpha, w}|^2 \stackrel{(3.3)}{=} |N_{\alpha, w-\alpha}|^2 - |N_{\alpha, w}|^2
 \end{aligned}$$

erhalten, wobei die Gleichheit \star trivial folgt mit

$$\left\langle w \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathcal{D}(H_j) \right| w \right\rangle = \left\langle w \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j \right| w \right\rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j = \alpha \cdot w .$$

6. Da die d -dimensionale Darstellung insbesondere endlichdimensional ist, muss man nach einer endlichen Anzahl von Operationen mit $\mathcal{D}(E_\alpha)$ und $\mathcal{D}(E_{-\alpha})$ irgendwann Null erreichen, wie zuvor bereits erläutert. Wir bezeichnen die Anzahl der Operationen nach oben mit p , die nach unten mit q , d.h. es gilt

$$\mathcal{D}(E_\alpha) | w + p\alpha \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(E_{-\alpha}) | w - q\alpha \rangle = 0 .$$

Mit anderen Worten gilt also $|N_{\alpha, w+p\alpha}| = |N_{-\alpha, w-q\alpha}| \stackrel{(3.3)}{=} |N_{\alpha, w-(q+1)\alpha}| = 0$.

7. Betrachten wir nun Gleichung (3.4), so gilt

$$\begin{array}{ll}
 w \rightarrow w + p\alpha : & \alpha \cdot (w + p\alpha) = |N_{\alpha, w+(p-1)\alpha}|^2 - 0 \\
 w \rightarrow w + (p-1)\alpha : & \alpha \cdot (w + (p-1)\alpha) = |N_{\alpha, w+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, w+(p-1)\alpha}|^2 \\
 \vdots & \vdots \\
 w \rightarrow w - (q-1)\alpha : & \alpha \cdot (w - (q-1)\alpha) = |N_{\alpha, w-q\alpha}|^2 - |N_{\alpha, w-(q-1)\alpha}|^2 \\
 w \rightarrow w - q\alpha : & \alpha \cdot (w - q\alpha) = 0 - |N_{\alpha, w+q\alpha}|^2
 \end{array}$$

Der erste Summand jeder Zeile findet sich nun in der nachfolgenden Zeile mit umgekehrten Vorzeichen wieder, also summieren sich alle diese Terme zu Null auf, es gilt somit

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=-q}^p \alpha \cdot (w + j\alpha) = \alpha \cdot w \left(\sum_{j=-q}^p 1 \right) + \alpha \cdot \alpha \sum_{j=-q}^p j \\
 &= \alpha \cdot w(p+q+1) + \alpha \cdot \alpha \left[\sum_{j=1}^p j - \sum_{j=1}^q j \right] \\
 &= \alpha \cdot w(p+q+1) + \alpha \cdot \alpha \left[\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} \right] \\
 &= \alpha \cdot w(p+q+1) + \alpha \cdot \alpha \frac{(p+q+1)(p-q)}{2} \\
 \iff &\frac{2\alpha \cdot w}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{2\alpha \cdot w}{|\alpha|^2} = q - p ,
 \end{aligned}$$

und damit ist die Herleitung der Hauptformel komplett.

3.4 Ausreduktion

Wir können jetzt mit der Hauptformel alle endlichdimensionalen *irreduziblen* unitären Darstellungen einer gegebenen (halbeinfachen) Lie-Gruppe klassifizieren. Die verbleibende Frage ist aber, wie es für eine beliebige allgemeine Darstellung aussieht, die im Allgemeinen reduzibel ist. Dabei soll der Schwerpunkt auf einer Produktdarstellung der Form $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \dots$ liegen. Somit kehren wir an dieser Stelle auf die bereits auf Seite 23 erwähnte Problemstellung der Ausreduktion zu einer Summe von irreduziblen Darstellungen $\mathcal{D}_a \oplus \mathcal{D}_b \oplus \dots$ zurück.

3.4.1 Gewichte von Summen- und Produkt-Darstellungen

Um zu einer derartigen Ausreduktion zu gelangen, müssen wir zunächst betrachten, wie die Gewichte und Generatoren von Summen und Produkten von Darstellungen aussehen.

- *Summen-Darstellungen:* $[\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2(g)](v_1, v_2) = (\mathcal{D}_1(g)v_1, 0) + (0, \mathcal{D}_2(g)v_2)$
 - Basisvektoren: $\{(\hat{e}_i, 0)\}$ zusammen mit $\{(0, \hat{e}_j)\}$
 - Generatoren: $\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{D}_1(T^a) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ zusammen mit $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{D}_2(T^a) \end{array}\right)$
 - Gewichtsvektoren: Falls $\mathcal{D}_1(H_i)v_1 = w_i v_1$ gilt, so folgt

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{D}_1(H_i) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_i \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und analog für \mathcal{D}_2 , d.h. die Gewichtsvektoren von $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ sind einfach durch die Gewichtsvektoren von \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 gegeben.

- *Produkt-Darstellungen:* $[\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2(g)](v_1, v_2) = (\mathcal{D}_1(g)v_1, \mathcal{D}_2(g)v_2)$
 - Basisvektoren: $\{(\hat{e}_i, \hat{e}_j)\}$
 - Generatoren: Mit $\mathcal{D}_i(g) = \exp(i\theta^a \mathcal{D}_i(T^a)) = \mathbb{1} + i\theta^a \mathcal{D}_i(T^a) + \mathcal{O}(\theta^a)^2$ folgt

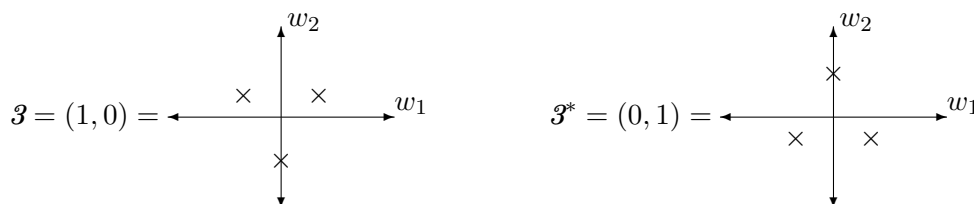
$$\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2(v_1, v_2) = (v_1, v_2) + i\theta^a \left[(\mathcal{D}_1(T^a)v_1, v_2) + (v_1, \mathcal{D}_2(T^a)v_2) \right] + \mathcal{O}(\theta^a)^2 .$$

- Gewichtsvektoren: Mit $\mathcal{D}_1(H_i)v_1 = w_i v_1$ und $\mathcal{D}_2(H_i)v_2 = \tilde{w}_i v_2$ folgt

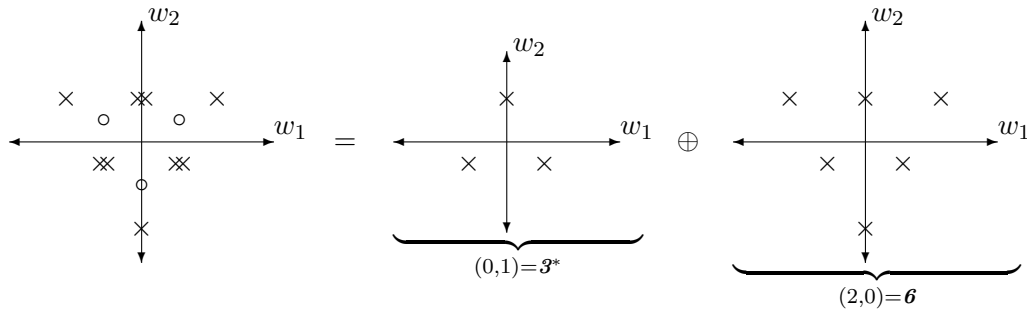
$$\left[(\mathcal{D}_1(H_i)v_1, v_2) + (v_1, \mathcal{D}_2(H_i)v_2) \right] = (w_i + \tilde{w}_i)(v_1, v_2) ,$$

d.h. die Gewichtsvektoren von $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$ sind alle möglichen Summen der Gewichtsvektoren von \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 .

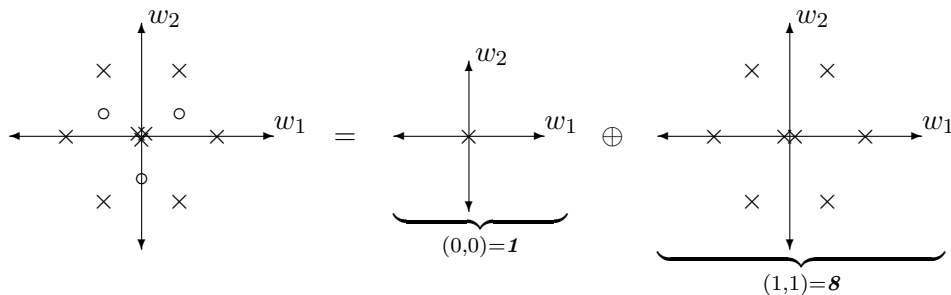
Beispiel: Wir ziehen wieder die $SU(3)$ als detailliertes Beispiel für Summen- und Produkt-Operationen der Darstellungen heran. Die fundamentale und konjugierte Darstellung kennen wir bereits:



Betrachten wir dann das direkte Produkt $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$:



Es gilt also offenbar $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} = \mathfrak{6} \oplus \mathfrak{3}^*$. Analog betrachten wir dann das direkte Produkt mit $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3}$ mit der konjugierten Darstellung:



Hier erhalten wir folglich die Zerlegung $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3} = \mathfrak{8} \oplus \mathfrak{1}$ der Produkt-Darstellung in irreduzible Darstellungen.

Ähnlich können wir auch mit der $SU(2)$ verfahren. Man beachte, dass für die Darstellung $\mathfrak{2}$ der $SU(2)$ es nur die beiden Gewichte $w_{\pm} = \pm \frac{1}{2}$ gibt. Mittels schrittweise weiter tensorierter Gewichtsdiagramme erhält man dann ganz einfach die Zerlegung

$$\mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2} = \mathfrak{4} \oplus \mathfrak{2} \oplus \mathfrak{2}$$

für die Transformation eine Drei-Quarkfeld und analog für ein Vier-Quarkfeld

$$\mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2} = \mathfrak{5} \oplus \mathfrak{3} \oplus \mathfrak{3} \oplus \mathfrak{1} \oplus \mathfrak{1}.$$

Wegen dieser Zerlegungen kann insbesondere $\mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2} \otimes \mathfrak{2}$ als Invarianzgruppe in der vorigen Aufgabe verwendet werden, nicht aber das vierfache direkte $\mathfrak{2}$ -Darstellungsprodukt.

3.4.2 Generatoren, Gewichte und Wurzeln der Spin-Gruppe $SU(2)$

Wir wollen das Prinzip der Ausreduktion nun auch auf andere Gruppe ausdehnen, wobei dazu im nächsten Abschnitt der $SU(2)$ besondere Aufmerksamkeit zuteil wird. Zunächst benötigen wir aber die Wurzeln der $SU(2)$ zur Verwendung der Hauptformel für die Bestimmung des fundamentalen Gewichts. Wir wissen bereits, dass die $SU(2)$ durch die Pauli-Matrizen erzeugt wird, d.h. wir betrachten die Erzeuger $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$. Davon ist

$$T^3 = \frac{\sigma^3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

der einzige diagonale Erzeuger, d.h. er allein spannt die maximale abelsche Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} der $SU(2)$ auf, denn es gilt $[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c$ nach der Vertauschungsrelation der Pauli-Matrizen. Da dann nur die eine Matrix $T^3 = \frac{\sigma^3}{2}$ zu berücksichtigen ist, sind die Eigenwerte

direkt durch die Diagonalelemente von T^3 gegeben, d.h. es gilt explizit für die **SU(2)-Gewichte**

$$\frac{\sigma^3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies w^1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma^3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies w^2 = -\frac{1}{2} .$$

Um die unabhängigen Generatoren E_α außerhalb der kommutativen Cartan-Unteralgebra zu bestimmen, betrachte die allgemeinste Linearkombination der übrigen Generatoren, wobei $H = T^3 \in \mathfrak{h}$ ist:

$$\begin{aligned} [H, E_\alpha] &= [T^3, \overbrace{\alpha_1 T^1 + \alpha_2 T^2}^{E_\alpha}] = \alpha_1 [T^3, T^1] + \alpha_2 [T^3, T^2] = i\alpha_1 \epsilon^{312} T^2 + i\alpha_2 \epsilon^{321} T^1 \\ &= i\epsilon^{123} (\alpha_1 T^2 - \alpha_2 T^1) = i(\alpha_1 T^2 - \alpha_2 T^1) \stackrel{!}{=} \alpha E_\alpha = \alpha(\alpha_1 T^1 + \alpha_2 T^2) , \end{aligned}$$

d.h. es muss $\alpha\alpha_1 = -i\alpha_2$ und $\alpha\alpha_2 = i\alpha_1$. Durch entsprechende Auflösung dieser beiden Gleichungen erhält man $\alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1$.

Betrachte im Folgenden den Fall $\alpha = 1$, d.h. es gilt $\alpha_1 = -i\alpha_2$, dann folgt für den ersten unabhängigen Generator

$$E_\alpha = \alpha_1 T^1 + i\alpha_1 T^2 = \alpha_1 (T^1 + iT^2) .$$

Um den frei wählbaren Parameter α_1 festzulegen, beachte die Normierung $\text{Sp}(E_\alpha E_\alpha^\dagger) = \frac{1}{2}$ für die unabhängigen Generatoren. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Sp}(E_\alpha E_\alpha^\dagger) &= \text{Sp} [\alpha_1 (T^1 + iT^2) \alpha_1^* ((T^1)^\dagger - i(T^2)^\dagger)] \\ &= |\alpha_1|^2 \cdot \text{Sp} [T^1 (T^1)^\dagger - iT^1 (T^2)^\dagger + iT^2 (T^1)^\dagger + T^2 (T^2)^\dagger] \\ &= |\alpha_1|^2 \cdot \text{Sp} [(T^1)^2 - iT^1 T^2 + iT^2 T^1 + (T^2)^2] = \frac{|\alpha_1|^2}{4} \text{Sp} [\mathbb{1}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \mathbb{1}_2] \\ &= \frac{|\alpha_1|^2}{2} \text{Sp} [\mathbb{1}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}] = |\alpha_1|^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \iff \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} , \end{aligned}$$

und ein analoges Vorgehen für den anderen unabhängigen Generator liefert dann schließlich die beiden **nicht-diagonalisierten SU(2)-Generatoren**

$$E_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (T^1 \pm iT^2) .$$

Zuletzt benötigen wir noch die fundamentalen Gewichte. Die **Wurzeln der SU(2)** haben wir durch die Gewichte nebenbei bereits zu

$$\alpha^1 = +1 \quad \alpha^2 = -1$$

bestimmt, wobei die erste die wichtige einfache positive Wurzel ist. Eingesetzt in die Hauptformel gilt dann

$$\frac{2\alpha^1 \cdot \mu^1}{|\alpha^1|^2} = 2 \cdot 1\mu^1 \stackrel{!}{=} \delta^{11} = 1 \iff \mu^1 = \frac{1}{2} ,$$

und damit ist das **fundamentale Gewicht der SU(2)** auch schon bestimmt.

Bemerkung: Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem quantenmechanischen Spin und der SU(2). Wir identifizieren den Spin s als physikalischen Messwert mit dem höchsten Gewicht w^1 . Dann gilt mit der Zerlegung in fundamentale Gewichte

$$s = w^1 = \sum_{k=1}^m q^k \mu^k = q^1 \cdot \mu^1 = \frac{1}{2} q^1 \iff 2s = q^1 ,$$

und damit erhalten wir bereits die Verbindung von Darstellung und Spin. Für gewähltes s ist umgekehrt $w^1 = s$ das eindeutige höchste Gewicht und $q^1 = 2s$ die verwendete Darstellung.

Bei Betrachtung der spinabhängigen Dimensionsformel $d(s) = 2s + 1$ folgt dann, dass über $s = \frac{d-1}{2}$ für jede beliebige Dimension d eine Darstellung der $SU(2)$ existiert⁴ - diese haben wir jetzt durch den Spin s mit $2s = d - 1$ beschrieben.

Bemerkung: Für die Spin-Gruppe $SU(2)$ mit $s = \frac{q}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ kennen wir schon das entsprechende Ergebnis der Ausreduktion in einer allgemeinen Form aus der Quantenmechanik:

$$„s_1 \otimes s_2“ = „|s_1 - s_2|“ \oplus „|s_1 - s_2|“ \oplus \dots \oplus „|s_1 + s_2|“ ,$$

wobei die Größen s_i jeweils symbolisch zu verstehen sind. Diese „Darstellungen“ s_i haben jeweils die Dimension $d_i = 2s_i + 1$.

3.4.3 Clebsch-Gordan-Zerlegung in der $SU(2)$

Bisher haben wir mit Gewichtsvektoren, d.h. den Messwerten der Eigenzustände, gearbeitet. Die Frage ist aber, wie man einen Eigenzustand bzw. die Wellenfunktion selbst als eine Summe der Eigenzustände irreduzibler Darstellungen schreibt, d.h. wie sieht

$$(v, \tilde{v}) = \sum_{i,j} v_i \tilde{v}_j (\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \sum_{i,j} v_i \tilde{v}_j \left(\sum_{\alpha} C_{\alpha}^{(1)} \hat{e}_{\alpha}^{(1)} + \sum_{\beta} C_{\beta}^{(2)} \hat{e}_{\beta}^{(2)} + \dots \right)$$

wo $\hat{e}_{\alpha}^{(i)}$ die Basisvektoren der irreduziblen Darstellung sind, aus? Es gilt also wieder einmal die Koeffizienten $C_{\alpha}^{(i)}$ zu bestimmen. Dieses Problem ist aber nichts anderes als eine Verallgemeinerung der **Clebsch-Gordan-Zerlegung** der Darstellungen der $SU(2)$, die man bereits von der Addition quantenmechanischer Drehimpulse her kennt. Zur Erinnerung:

- Die Cartan-Unteralgebra der $SU(2)$ wird von $H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma^3 =: S_3$ aufgespannt, die Darstellung ist durch $q^1 = 2s$ gegeben (wir bezeichnen also für die $SU(2)$ ab jetzt mit dem Spin die Darstellung) und das Gewicht w_1 ist physikalisch als Drehimpulskomponente m zu interpretieren.
- Für gegebenen Spin s ist das höchste Gewicht durch $m = s$ gegeben.
- Alle übrigen Gewichte sind $m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$, wobei die zugehörige Darstellungsdimension dann $d = 2s + 1$ ist.
- Wie in der Quantenmechanik notieren wir Basisvektoren bzw. Eigenzustände durch $|s, m\rangle$.
- Die Drehimpulsaddition geschieht durch $(v_1, v_2) = |s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle$.
- Es gilt $S_{\pm} |s, m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s, m \pm 1\rangle$.

Das Tensorprodukt ist im Allgemeinen also allgemein durch die **Clebsch-Gordan-Koeffizienten**⁵ zu berechnen - zwei Eigenschaften können wir aber direkt formulieren. Nach den Eigenschaften der Produkt-Darstellung ist das Gewicht von $|s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle$ gleich $m_1 + m_2$. Außerdem kann unter der Zerlegung „ $|s_1 - s_2|“ \oplus „|s_1 - s_2|“ \oplus \dots \oplus „|s_1 + s_2|“$ aus der vorigen Bemerkung nur „ $s_1 + s_2$ “ das Gewicht $s_1 + s_2$ haben, also gilt der Spezialfall

$$|s_1, m_1 = s_1\rangle |s_2, m_2 = s_2\rangle = |s_1 + s_2, s_1 + s_2\rangle .$$

⁴Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Betrachten wir etwa die allgemeine Dimensionsformel der $SU(3)$ -Darstellungen, so findet sich beispielsweise keine Darstellung mit $d = 2$.

⁵Eine Tabelle mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten ist unter <http://pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf> zu finden.

Operiert man jetzt auf beiden Seite mit S_- , so kann man die Clebsch-Gordan-Zerlegung herleiten.

Beispiel: Die eben erläuterten Konzepte sollen an einem Beispiel verdeutlicht werden. Die Frage ist, wie man das Produkt $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ mit den Eigenzuständen $|1, m\rangle$ und $|0, 0\rangle$ ausdrücken kann. Zunächst einmal gilt

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle .$$

Wenden wir nun S_- an, so erhalten wir mit $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1$ und $\sqrt{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0} = \sqrt{2}$ dann

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle .$$

Erneute Anwendung von S_- liefert dann mit $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = 0$ und $\sqrt{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1} = \sqrt{2}$

$$2|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = 2|1, -1\rangle ,$$

also erhalten wir umgekehrt formuliert die drei Gleichheiten

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right) \\ |1, -1\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zu diesen drei Spin-1-Zuständen muss $|0, 0\rangle$ orthogonal sein (alternativ kann man von der Eigenschaft $S_+|0, 0\rangle = 0$ ausgehen) und normiert, also

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right) , \tag{3.6}$$

wobei das Vorzeichen dieses Zustands per Konvention gewählt wird. Damit können wir nun trivialerweise

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, 0\rangle + |0, 0\rangle \right)$$

schreiben, womit wir zum gesuchten Ausdruck gelangt sind. Wir werden diese Identitäten später in 3.6.1 für die Isospin-Zustände der Pionen verwenden.

3.4.4 Verallgemeinerung

Das vorgestellte Prinzip der Ausreduktion in der $SU(2)$ lässt sich entsprechend verallgemeinern:

- Der Eigenzustand mit dem höchsten Gewicht ist ein direktes Produkt der Eigenzustände mit den höchsten Gewichten der „Teilnehmerdarstellung“.
- Andere Beziehungen können analog durch Operationen mit $\mathcal{D}(E_{-\alpha^k})$ hergeleitet werden.
- Man sollte stets darauf achten, dass die Eigenzustände verschiedener irreduzibler Darstellungen orthogonal zueinander sind, weil sie sich in orthogonalen Unterräumen befinden.

In der Praxis sind solche Konstruktionen jedoch recht mühsam, daher werden wir jetzt eine weitere Methode kennenlernen.

3.5 Tensormethode der Ausreduktion

Wir haben im letzten Abschnitt Methoden für die Ausreduktion reduzierbarer Darstellung (insbesondere der $SU(2)$ - und $SU(3)$ -Gruppe) kennengelernt, die zwar sehr allgemein sind, aber leider oft sehr mühsam anzuwenden. Daher wollen wir nun eine Methode betrachten, die nur für spezielle Fälle geeignet ist, dafür aber sehr elegant und effizient funktioniert.

3.5.1 Produkte fundamentaler und konjugierter Darstellungen

Betrachten wir dazu ein direktes Produkt einer beliebigen Menge *fundamentaler* und *konjugierter* Darstellungen, wobei \hat{e}_{i_n} und \hat{e}^{j_m} die jeweiligen Basisvektoren seien (man beachte die unterschiedliche Hoch-/Tiefstellung der Indizes). Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention schreiben wir einen Zustand dann als

$$v = v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} \left(\hat{e}_{i_1}, \hat{e}_{i_2}, \dots, \hat{e}_{i_n}, \hat{e}^{j_1}, \hat{e}^{j_2}, \dots, \hat{e}^{j_m} \right)$$

Es sei jetzt g ein Element der Gruppe, dessen Darstellung auf v wirkt (man könnte auch allgemeine Generatoren benutzen, aber es geht hier einfacher mit g). Dann gilt

$$\mathcal{D}(g)v = \tilde{v}_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_m}^{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_n} \left(\hat{e}_{\tilde{i}_1}, \hat{e}_{\tilde{i}_2}, \dots, \hat{e}_{\tilde{i}_n}, \hat{e}^{\tilde{j}_1}, \hat{e}^{\tilde{j}_2}, \dots, \hat{e}^{\tilde{j}_m} \right),$$

worin wir die Koeffizienten $\tilde{v}_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_m}^{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_n}$ wegen

$$g \hat{e}_{i_a} = \hat{e}_{\tilde{i}_a} g_{i_a i_a} = \hat{e}_{\tilde{i}_a} g_{i_a}^{\tilde{i}_a} \quad \text{und} \quad g^* \hat{e}^{j_b} = \hat{e}^{\tilde{j}_b} g^*_{j_b j_b} = \hat{e}^{\tilde{j}_b} g^{*j_b}_{\tilde{j}_b}$$

auch direkt als $\tilde{v}_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_m}^{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_n} = \underbrace{g_{i_1}^{\tilde{i}_1} g_{i_2}^{\tilde{i}_2} \dots g_{i_n}^{\tilde{i}_n}}_{\text{fundamentale Darstellungen}} \underbrace{g^*_{\tilde{j}_1}{}^{j_1} g^*_{\tilde{j}_2}{}^{j_2} \dots g^*_{\tilde{j}_m}{}^{j_m}}_{\text{konjugierte Darstellungen}} v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$

schreiben können. Alle Informationen sind nun in dieser tensorartigen Transformation der Koeffizienten enthalten - daher auch der Name.

Jetzt können wir drei wichtige Eigenschaften der Transformation und ihre Manifestation in der obigen Notation betrachten:

1. *Symmetrie*: v symmetrisch unter $i_a \leftrightarrow i_b$ bzw. $j_a \leftrightarrow j_b$ ist äquivalent zu \tilde{v} symmetrisch unter $\tilde{i}_a \leftrightarrow \tilde{i}_b$ bzw. $\tilde{j}_a \leftrightarrow \tilde{j}_b$.
2. *Antisymmetrie*: v antisymmetrisch unter $i_a \leftrightarrow i_b$ bzw. $j_a \leftrightarrow j_b$ ist äquivalent zu \tilde{v} antisymmetrisch unter $\tilde{i}_a \leftrightarrow \tilde{i}_b$ bzw. $\tilde{j}_a \leftrightarrow \tilde{j}_b$.
3. *Spurteil*: v hat einen Spurteil $\delta_{j_b}^{i_a}$ genau dann, wenn \tilde{v} einen Spurteil $\delta_{\tilde{j}_b}^{\tilde{i}_a}$ hat.

Während die ersten beiden Aussagen trivial folgen, betrachtet man (unter Verwendung dass g unitär ist) die Rechnung

$$g_{i_a}^{\tilde{i}_a} g^{*j_b}_{\tilde{j}_b} \delta_{j_b}^{i_a} = g_{i_a i_a} g^*_{\tilde{j}_b i_a} = g_{i_a i_a} g_{i_a \tilde{j}_a}^{\dagger} = (g g^{\dagger})_{\tilde{i}_a \tilde{j}_b} = \delta_{\tilde{i}_a \tilde{j}_b} = \delta_{\tilde{j}_b}^{\tilde{i}_a}.$$

FAZIT: *Somit sind symmetrische und antisymmetrische Tensoren sowie Spurteile invariante Unterräume und können damit als Basen für irreduzible Darstellungen dienen.*

3.5.2 Zusätzlicher invarianter ϵ -Tensor

In einigen speziellen Fällen kommt noch eine weitere invariante Struktur durch den total antisymmetrischen ϵ -Tensor hinzu. Man beachte, dass für ihn die allgemeine Identität

$$\epsilon_{abc\dots g} g_{ai} g_{bj} g_{ck} \dots = \det(g) \epsilon_{ijk\dots}$$

gilt.⁶ Falls wir also eine Gruppe mit $\det(g) = 1$ haben (beispielsweise die SL-, SO- oder SU-Gruppen), dargestellt durch $n \times n$ -Matrizen, dann ist der n -komponentige ϵ -Tensor eine weitere invariante Struktur, die wir in der Ausreduktion benutzen können. Dies führt sofort zu wichtigen Ergebnissen:

- Betrachte die Gleichheit $\epsilon^{ij} \epsilon_{jk} = \epsilon^{i1} \epsilon_{1k} + \epsilon^{i2} \epsilon_{2k} = -\epsilon^{1i} \epsilon_{1k} - \epsilon^{i2} \epsilon_{k2} = -\delta_k^i$, dann folgt für die SU(2) direkt

$$v_{\dots}^i = \delta_k^i v_{\dots}^k = -\epsilon^{ij} (\epsilon_{jk} v^k) .$$

Der eingeklammerte Teil ist dabei ein Objekt mit einem unteren Index, gehört also zu konjugierter Darstellung, während der betrachtete Index auf der linken Seite oben steht und damit zur fundamentalen Darstellung gehört. Folglich sind also konjugierte und fundamentale Darstellung der SU(2) äquivalent.⁷

- Analog betrachte $\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{imn} = \frac{1}{2} (\delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k)$, so gilt für die SU(3) bei Antisymmetrie von $v_{\dots}^{j\dots k\dots}$ unter der Vertauschung $j \leftrightarrow k$ die Gleichheit

$$v_{\dots}^{j\dots k\dots} = \frac{1}{2} (v_{\dots}^{j\dots k\dots} - v_{\dots}^{k\dots j\dots}) = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\epsilon_{imn} v_{\dots}^{m\dots n\dots}) .$$

Wiederum erhalten wir ein invariantes Objekt mit einem unteren Index (d.h. konjugierter Darstellung).

Hier ist also die asymmetrische fundamentale Darstellung der SU(3) äquivalent zur konjugierten Darstellung.

Mit der Tensormethode erhält man also sehr rasch tiefe Ergebnisse. Um die Anwendung zu verdeutlichen, betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel: Wir wollen nun als Gegenstück zur „grafischen“ Ausreduktion der SU(3)-Darstellungen $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$ und $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3}$ von Seite 34 dieselben Ergebnisse mit der Tensormethode reproduzieren.

- *Ausreduktion von $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$:* Die Komponenten des Zustands sind von der Form $v^{ij} = S^i T^j$, diesen brauchen wir nun nur gemäß

$$S^i T^j = \frac{1}{2} S^{\{i T^j\}} + \frac{1}{2} S^{[i T^j]}$$

zu symmetrisieren, wobei $S^{\{i T^j\}} = S^i T^j + S^j T^i$ und $S^{[i T^j]} = S^i T^j - S^j T^i$ bedeutet. In der symmetrischen ersten Struktur finden sich dann 6 unabhängige Komponenten (symmetrische 3×3 -Matrix), während die antisymmetrische Kombination auf der anderen Seite äquivalent zu $\mathfrak{3}^*$ ist. Also erhalten wir $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} = \mathfrak{6} \oplus \mathfrak{3}^*$.

⁶Man kann die Identität für kleine n natürlich direkt nachrechnen. Im Allgemeinen folgt die Aussage daher, dass die Determinante als alternierende Differentialform dargestellt werden kann.

⁷Man vergleiche auch den direkten Beweis auf Seite 22.

- *Ausreduktion von $\mathfrak{Z}^* \otimes \mathfrak{Z}$* : Für diese Darstellung $\mathfrak{Z}^* \otimes \mathfrak{Z}$ hat der Zustand die Form $v_j^i = S^i T_j$, wir betrachten dazu die folgende Zerlegung

$$v_j^i = S^i T_j = \underbrace{S^i T_j - \frac{1}{3} \delta_j^i S^k T_k}_{\text{spurlos}} + \frac{1}{3} \delta_j^i S^k T_k .$$

Das Problem reduziert sich nun also wieder darauf, die unabhängigen Strukturen in den beiden Teilen zu bestimmen. Eine spurlose 3×3 -Matrix hat genau 8 unbestimmte Strukturen, während es dafür im zweiten Teil nur ein einziges freies Objekt gibt. Folglich erhalten wir also $\mathfrak{Z}^* \otimes \mathfrak{Z} = \mathfrak{8} \oplus \mathbf{1}$ als Ausreduktion.

3.5.3 Formulierung der Ausreduktion mit Projektoren

Die zuvor betrachtete tensorielle Ausreduktion von Produkt-Darstellung lässt sich auch mit Projektionen formulieren.

Beispiel: • *Ausreduktion von $\mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{Z}$* : Die Symmetrisierungen und Antisymmetrisierungen der Tensormethode der Ausreduktion für die $SU(3)$ seien durch die zugehörigen Projektionen

$$[P_s]_{kl}^{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_{il} \delta_k^j \right) \quad \text{und} \quad [P_a]_{kl}^{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_{il} \delta_k^j \right)$$

definiert. Für diese Projektionen gelten nun die folgenden vier Identitäten:

$$\begin{aligned} [P_s]_{kl}^{ij} + [P_a]_{kl}^{ij} &= \frac{1}{2} \left(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_{il} \delta_k^j \right) + \frac{1}{2} \left(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_{il} \delta_k^j \right) = \delta_k^i \delta_l^j \\ [P_s]_{kl}^{ij} [P_s]_{mn}^{kl} &= \frac{1}{4} \left(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_{il} \delta_k^j \right) \left(\delta_m^k \delta_n^l + \delta_{kn} \delta_m^l \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta_k^i \delta_l^j \delta_m^k \delta_n^l + \delta_k^i \delta_l^j \delta_n^k \delta_m^l + \delta_l^i \delta_k^j \delta_m^k \delta_n^l + \delta_l^i \delta_k^j \delta_n^k \delta_m^l \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta_m^i \delta_n^j + \delta_n^i \delta_m^j + \delta_n^i \delta_m^j + \delta_m^i \delta_n^j \right] = \frac{1}{2} \left[\delta_m^i \delta_n^j + \delta_n^i \delta_m^j \right] = [P_s]_{mn}^{ij} \\ [P_a]_{kl}^{ij} [P_a]_{mn}^{kl} &= \frac{1}{4} \left(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_{il} \delta_k^j \right) \left(\delta_m^k \delta_n^l - \delta_{kn} \delta_m^l \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta_k^i \delta_l^j \delta_m^k \delta_n^l - \delta_k^i \delta_l^j \delta_n^k \delta_m^l - \delta_l^i \delta_k^j \delta_m^k \delta_n^l + \delta_l^i \delta_k^j \delta_n^k \delta_m^l \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j - \delta_n^i \delta_m^j + \delta_m^i \delta_n^j \right] = \frac{1}{2} \left[\delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j \right] = [P_a]_{mn}^{ij} \\ [P_s]_{kl}^{ij} [P_a]_{mn}^{kl} &= \frac{1}{4} \left(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_{il} \delta_k^j \right) \left(\delta_m^k \delta_n^l - \delta_{kn} \delta_m^l \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta_k^i \delta_l^j \delta_m^k \delta_n^l - \delta_k^i \delta_l^j \delta_n^k \delta_m^l + \delta_l^i \delta_k^j \delta_m^k \delta_n^l - \delta_l^i \delta_k^j \delta_n^k \delta_m^l \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j + \delta_n^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_n^j \right] = 0 \end{aligned}$$

Unter der Verwendung von $\delta_i^i = 3$ (d.h. wir gehen von $i = 1, 2, 3$ aus) folgt direkt

$$\begin{aligned} [P_s]_{ij}^{ij} &= \frac{1}{2} \left(\delta_i^i \delta_j^j + \delta_j^i \delta_i^j \right) = \frac{1}{2} \left((\delta_i^i)^2 + \delta_i^i \right) = \frac{1}{2} (3^2 + 3) = 6 \\ [P_a]_{ij}^{ij} &= \frac{1}{2} \left(\delta_i^i \delta_j^j - \delta_j^i \delta_i^j \right) = \frac{1}{2} \left((\delta_i^i)^2 - \delta_i^i \right) = \frac{1}{2} (3^2 - 3) = 3 \end{aligned}$$

Da bei $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$ zwei fundamentale Darstellungen miteinander verknüpft werden, haben wir entsprechend auch zwei (fundamentale) obere Indizes, d.h. für den Vektor gilt

$$v = S^i T^j (\hat{e}_i, \hat{e}_j) .$$

Mithilfe des Kronecker-Deltas lässt sich nun $S^i T^j$ wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} S^i T^j &= \delta_k^i \delta_l^j S^k T^l = [P_s]_{kl}^{ij} S^k T^l + [P_a]_{kl}^{ij} S^k S^l \\ &= \frac{1}{2} (S^i T^j + S^j T^i) + \frac{1}{2} (S^i T^j - S^j T^i) = \frac{1}{2} \underbrace{S^{\{i T^j\}}}_{\mathfrak{6}} + \frac{1}{2} \underbrace{S^{[i T^j]}}_{\mathfrak{3}^*} \end{aligned}$$

- *Ausreduktion von $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3}$* : Nun betrachten wir zwei andere Projektionen für die tensorielle Ausreduktion der $SU(3)$, welche durch

$$[P_t]_{jl}^{ik} = \delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \quad \text{und} \quad [P_l]_{jl}^{ik} = \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k$$

gegeben sind. Analog zur vorigen Betrachtung werden jetzt wieder einige Identitäten dieser Projektoren berechnet:

$$\begin{aligned} [P_t]_{jl}^{ik} + [P_l]_{jl}^{ik} &= \delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k + \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k = \delta_k^i \delta_j^k \\ [P_t]_{jl}^{ik} + [P_t]_{jl}^{ik} &= \left(\delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \right) \left(\delta_n^l \delta_k^m - \frac{1}{3} \delta_k^l \delta_n^m \right) \\ &= \delta_l^i \delta_j^k \delta_n^l \delta_k^m - \frac{1}{3} \delta_l^i \delta_j^k \delta_k^l \delta_n^m - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \delta_n^l \delta_k^m + \frac{1}{9} \delta_j^i \delta_l^k \delta_k^l \delta_n^m \\ &= \delta_n^i \delta_j^m - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m + \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m = \delta_n^i \delta_j^m - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m = [P_t]_{jn}^{im} \\ [P_l]_{jl}^{ik} [P_l]_{kn}^{lm} &= \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \frac{1}{3} \delta_k^l \delta_n^m = \frac{1}{9} \delta_k^i \delta_k^k \delta_n^m = \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m = [P_l]_{jn}^{im} \\ [P_t]_{jl}^{ik} [P_l]_{kn}^{lm} &= \left(\delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \right) \frac{1}{3} \delta_k^l \delta_n^m = \frac{1}{3} \delta_l^i \delta_j^k \delta_k^l \delta_n^m - \frac{1}{9} \delta_j^i \delta_l^k \delta_k^l \delta_n^m \\ &= \frac{1}{3} \delta_k^i \delta_j^k \delta_n^m - \frac{1}{9} \delta_j^i \delta_k^k \delta_n^m = \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_n^m = 0 \end{aligned}$$

Es folgen durch triviales Nachrechnen direkt die gewünschten Gleichheiten:

$$\begin{aligned} [P_t]_{ji}^{ij} &= \delta_i^i \delta_j^j - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_i^j = 3 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 8 \\ [P_l]_{ji}^{ij} &= \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_i^j = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Die beiden Projektionen $[P_t]_{jl}^{ik}$ und $[P_l]_{jl}^{ik}$ sollen nun wieder dazu verwendet werden die Ausreduktion von $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3}$ über die tensorielle Methode zu bestimmen. Bei $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3}$ haben wir einen fundamentalen (oberen) und einen konjugierten (unteren) Index, d.h. wir betrachten das Objekt

$$v = S^i T_j (\hat{e}_i, \hat{e}^j) .$$

Mit dem Kronecker-Delta gelangen wir dann zu folgenden Darstellung:

$$\begin{aligned}
 S^i T_j &= \delta_l^i \delta_j^k S^l T_k = \left([P_t]_{jl}^{ik} + [P_l]_{jl}^{ik} \right) S^l T_k \\
 &= \left(\delta_j^i \delta_j^k \cdot \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \right) S^l T_k + \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k S^l T_k \\
 &= \underbrace{S^i T_j - \frac{1}{3} \delta_j^i S^l T_l}_{\mathbf{8}} + \underbrace{\frac{1}{3} \delta_j^i S^l T_l}_{\mathbf{1}} ,
 \end{aligned}$$

also gilt $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

- *Ausreduktion der Darstellung $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$* : Zur Ausreduktion von Drei-Quark-Zuständen $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$ definieren wir einen weiteren Satz von vier Projektionen durch

$$\begin{aligned}
 [P_A]_{mno}^{ijk} &= \frac{1}{6} \left(\delta_m^i \delta_n^j \delta_o^k + \delta_m^i \delta_o^j \delta_n^k + \delta_n^i \delta_o^j \delta_m^k + \delta_n^i \delta_m^j \delta_o^k + \delta_o^i \delta_m^j \delta_n^k + \delta_o^i \delta_n^j \delta_m^k \right) \\
 [P_B]_{mno}^{ijk} &= \frac{1}{6} \epsilon^{jkt} \left(2\delta_m^i \epsilon_{not} + \delta_n^i \epsilon_{mot} + \delta_o^i \epsilon_{nmt} \right) \\
 [P_C]_{mno}^{ijk} &= \frac{1}{6} \left[\epsilon^{ikt} \left(\delta_n^j \epsilon_{mot} + \delta_o^j \epsilon_{mnt} \right) + \epsilon^{ijt} \left(\delta_n^k \epsilon_{mot} + \delta_o^k \epsilon_{mnt} \right) \right] \\
 [P_D]_{mno}^{ijk} &= \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} \epsilon_{mno} ,
 \end{aligned}$$

die Identität $[P_A]_{mno}^{ijk} + [P_B]_{mno}^{ijk} + [P_C]_{mno}^{ijk} + [P_D]_{mno}^{ijk} = \delta_m^i \delta_n^j \delta_o^k$ erhält man dann durch brutales (aber überaus umfangreiches) Einsetzen und Ausrechnen, genau wie in den vorigen beiden Aufgaben. Dabei wird zum einen die Identität

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k$$

verwendet, und zum anderen geht außerdem die Gleichung

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{mno} = \delta_m^i \delta_n^j \delta_o^k - \delta_m^i \delta_o^j \delta_n^k + \delta_n^i \delta_o^j \delta_m^k - \delta_n^i \delta_m^j \delta_o^k + \delta_o^i \delta_m^j \delta_n^k - \delta_o^i \delta_n^j \delta_m^k$$

ein. Wir betrachten nun das zweifache direkte Darstellungsprodukt fundamentaler $SU(3)$ -Darstellungen, d.h. wir haben drei obere (fundamentale) Indizes in der tensoriellen Formulierung. Für dieser verwenden wir jetzt die Identität

$$S^i T^j U^k = \delta_m^i \delta_n^j \delta_o^k S^m T^n U^o = [P_A + P_B + P_C + P_D]_{mno}^{ijk} S^m T^n U^o$$

unter Beachtung des vorigen Ergebnisses. Analog zu den ersten beiden Aufgaben berechnen wir nun dann die Dimension der Projektion durch

$$[P_A]_{ijk}^{ijk} = 10 \quad [P_B]_{ijk}^{ijk} = [P_C]_{ijk}^{ijk} = 8 \quad [P_D]_{ijk}^{ijk} = 1 .$$

Folglich erhalten wir also mit der tensoriellen Ausreduktion durch die Projektionen die Zerlegung $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

3.5.4 Zusatz: Dimension $d(q^1, q^2)$ einer allgemeinen $SU(3)$ -Darstellung

Die Tensormethode erlaubt es uns nun, die Dimension $d(q^1, q^2)$ einer allgemeinen $SU(3)$ -Darstellung zu bestimmen, welche wir bereits auf Seite 30 betrachtet haben.

1. Falls es für den Zustand v obere bzw. untere Indizes gibt, die unter Vertauschung antisymmetrisch sind, so können wir diese mit dem ϵ -Tensor zu einem einzigen Index oben bzw. unten zusammenfassen (wie wir es für die $SU(2)$ und $SU(3)$ im letzten Abschnitt gezeigt haben). Folglich können wir direkt annehmen, dass alle irreduziblen Darstellungen Koeffizienten haben, deren Indizes oben und unten völlig symmetrisch unter Vertauschung sind.
2. Außerdem können wir auch Spurteile aussondern. Somit betrachten wir also nur noch Tensoren $v_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$, deren Indizes für jede Vertauschung $i_a \leftrightarrow i_b$ sowie $j_c \leftrightarrow j_d$ symmetrisch sind und zudem spurlos nach Ausoperation mit einem beliebigen $\delta_{i_b}^{j_a}$ sind. Ein solches Objekt bezeichnen wir mit (n, m) .
3. Die Frage ist nun, welches das höchste Gewicht ist, das wir mit derartigen Koeffizienten erhalten können. Dazu wählen wir obere Indizes, die dem obersten Gewicht $w^1 = \mu^1$ entsprechen, d.h.

$$i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1 \quad \text{und} \quad \hat{e}_1 = (1, 0, 0) .$$

Auf der anderen Seite ist μ^2 eines der Gewichte der konjugierten Darstellung (ÜBUNG 6.4), es kann aber nicht \hat{e}^1 entsprechen, da man sonst das Gewicht $-\mu^1$ erhalten würde. Daher sei es beispielsweise $\hat{e}^2 = (0, 1, 0)$. Somit betrachten wir also den Tensor $v_{22 \dots 2}^{11 \dots 1}$ mit n oberen Einsen und m unteren Zweien - dieser ist insbesondere symmetrisch und hat keinen Teil, der zu einem Spurteil δ_j^i proportional ist - folglich ist $v_{22 \dots 2}^{11 \dots 1}$ von der gewünschten Form. Das höchste Gewicht dieser Darstellung ist $n\mu^1 + m\mu^2$, also gilt $q^1 = n$ und $q^2 = m$.

4. Nun bleibt es wieder zu klären, wieviele unabhängige Koeffizienten von dieser besonderen Form es gibt. Die Symmetrie der Indizes erlaubt es diese in die Reihenfolge

$$11 \dots 122 \dots 233 \dots 3$$

zu ordnen, wobei wir diese Ordnung durch Angabe der Position der ersten 2 und der ersten 3 charakterisieren können. Für die obere 2 und 3 erhalten wir dann eine symmetrische $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix, d.h. wir bekommen

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Möglichkeiten. Dasselbe gilt auch für die unteren Indizes, allerdings mit $n \rightarrow m$. Würden wir stattdessen eine Spur nehmen, so hätten wir dieselben Symmetrien, aber mit $n-1$ Indizes oben und $m-1$ Indizes unten. Wegen der zuvor erwähnten Spurlosigkeit müssen also solchen Indexwahlen dann herausfallen, sodass nur

$$\begin{aligned} d(n, m) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(m+1)}{4} [nm + 2m + 2n + 4 - nm] = \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2} \end{aligned}$$

übrigbleibt. Damit haben wir allgemeine Dimensionformel der $SU(3)$ -Darstellungen gezeigt.

3.6 Anwendungen

In den vorigen Kapiteln haben wir ausführlich gelernt, welche unitären irreduziblen Darstellungen eine gegebene (halbeinfache) Lie-Gruppe bzw. -Algebra hat. Es ist sinnvoll an dieser Stelle einige physikalische Anwendungen zu betrachten, um die benutzten Methoden zu verdeutlichen.

3.6.1 Teilchenspektren

Die möglichen Entartungen der Energie- und Masseneigenzustände werden durch die Dimension irreduzibler Darstellungen der relevanten Invarianzgruppen bestimmt.

Beispiel: Die u - und d -Quarks haben (bei Vernachlässigung der deutlich unterschiedlichen elektromagnetischen Wechselwirkung) sehr ähnliche Eigenschaften. Diese Tatsache suggeriert die Existenz einer (näherungsweise) $SU(2)$ -Invarianz, die als **Isospin-Symmetrie** bezeichnet wird. Man identifiziert u und d als die $|I, I_3\rangle$ -Isospin-Zustände

$$u = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \bar{u} = -\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad d = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \bar{d} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle .$$

dann lassen sich etwa die Pionen $\pi^+ = |1, 1\rangle$, $\pi^0 = |1, 0\rangle$ und $\pi^- = |1, -1\rangle$ als Linearkombinationen dieser vier Quarks schreiben, wobei man unter Verwendung der Gleichheiten (3.5) von Seite 38 zu

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^- = -d\bar{u} \quad \text{und} \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

gelangt. Fügen wir auch noch das s -Quark hinzu, so können wir analog die $SU(3)$ als (näherungsweise) Symmetrie-Gruppe der leichten drei Quarks betrachten. Insbesondere bleibt die $SU(2)$ eine Untergruppe der $SU(3)$, wo die Entartungen geringer sind. Die drei Gewichtsachsen haben dabei eine physikalische Interpretation:

$$u = (1, 0, 0) \quad d = (0, 1, 0) \quad s = (0, 0, 1) .$$

Außerdem sind die beiden Erzeuger der $SU(3)$ -Cartan-Unteralgebra zu betrachten, vgl. Seite 25. H_1 führt auf die Interpretation, dass $w_1 = I_3$ der dritten Komponente des Isospins entspricht, während H_2 impliziert, dass w_2 eine Linearkombination von I_3 und Ladung ist, genannt $\frac{\sqrt{3}Y}{2}$, wobei Y die sogenannte **Hyperladung** ist.⁸ Die leichtesten beobachteten Teilchen der drei Quarks u , d und s sind dann die folgenden:

- *Mesonen:* Dieses sind Quark-Antiquark-Zustände, d.h. $\mathfrak{3}^* \otimes \mathfrak{3} = \mathfrak{8} \oplus \mathbf{1}$ ist die zugehörige Gruppendarstellung. Das Gewichtsdiagramm wird dann mit folgenden Bezeichnungen

⁸Die Isospins I_3 und elektrischen Ladungen der u -, d - und s -Quarks sind durch

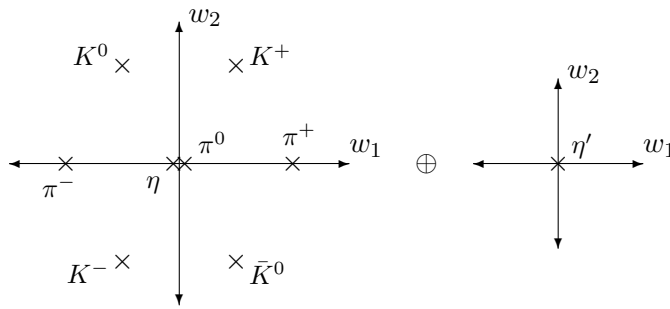
$$I_3^u = \frac{1}{3}, \quad I_3^d = -\frac{1}{3}, \quad I_3^s = 0 \quad \text{und} \quad Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}, \quad Q_s = -\frac{1}{3}$$

gegeben. Wir setzen die Hyperladung Y gleich dem zweiten Gewicht $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y$. Um nun einen Ausdruck $Y(I_3, Q)$ zu bestimmen, betrachte man explizit die Gewichts-Eigenwertgleichung für w_2 , dann gilt

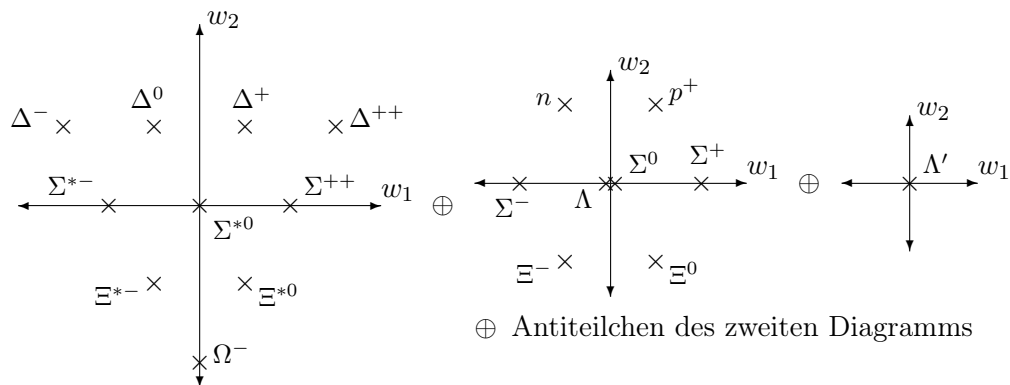
$$w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y \iff H_2 v = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} v = \frac{\sqrt{3}}{2}Y v .$$

Identifizieren wir nun die drei Quarks gemäß $u = \hat{e}_1$, $d = \hat{e}_2$ und $s = \hat{e}_3$ mit den drei Standard-

versehen:



- *Baryonen*: Dies sind Drei-Quark-Zustände, wobei man zunächst Antiquarks ausschließt. Folglich ist $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ die geeignete Darstellung



Die Darstellungstheorie führt uns also auf einem sehr eleganten Weg auf Teilchenspektren in der Elementarteilchenphysik.

3.6.2 Elastische Streuung

Symmetrien spielen aber nicht nur für „stationäre“ Eigenschaften des Systems eine wichtige Rolle (wie etwa die zuvor vorgestellten Teilchenspektren) sondern auch für dynamische Prozesse, z.B. die Streuung. Eine Streuung von Teilchen verlangt notgedrungen eine Wechselwirkung der betrachteten Konstituenten miteinander. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass nur die starken Wechselwirkungen hier eine relevante Rolle spielen. Außerdem wollen wir nur Quark-Antiquark-Mesonen betrachten, die aus u - und d -Quarks zusammengesetzt sind, sodass wir die $SU(2)$ -Isospin-Gruppe statt der $SU(3)$ verwenden können.

Einheitsvektoren, so erhalten wir drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} Y_u \iff Y_u = \frac{1}{3} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} a + \frac{2}{3} b \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} Y_d \iff Y_d = \frac{1}{3} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} b \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} (-2) &= \frac{\sqrt{3}}{2} Y_s \iff Y_s = -\frac{2}{3} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{3} b, \end{aligned}$$

und dieses lineare Gleichungssystem lässt sich trivial zu $a = -2$ und $b = 2$ hin auflösen. Also erhalten wir die Hyperladungs-Abhängigkeit

$$Y = -2I_3 + 2Q \iff Q = \frac{1}{2} Y + I_3 .$$

Beispiel: Zur Modellierung betrachten wir Zwei-Pionen-Zustände $|\pi^a\pi^b\rangle = |\pi^a\rangle|\pi^b\rangle$, wobei $a, b = -, 0, +$ sei und $|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle$, $|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$ und $|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$. Unter Verwendung einer Tabelle mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten lassen sich die jeweiligen Produkte direkt als reine Isospin-Zustände

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= |\pi^+\rangle|\pi^-\rangle = |1, 1\rangle|1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\ |\pi^-\pi^+\rangle &= |\pi^-\rangle|\pi^+\rangle = |1, -1\rangle|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\ |\pi^+\pi^0\rangle &= |\pi^+\rangle|\pi^0\rangle = |1, 1\rangle|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 1\rangle \\ |\pi^0\pi^+\rangle &= |\pi^0\rangle|\pi^+\rangle = |1, 0\rangle|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 1\rangle \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= |\pi^0\rangle|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle|1, 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \end{aligned}$$

formulieren. Mittels der **Symmetrisierung** der Zweiteilchen-Zustände

$$|AB\rangle = \frac{1}{2}(|AB\rangle + |BA\rangle)$$

und der Clebsch-Gordan-Zerlegung gelangt man dann zu den folgenden symmetrisierten Zuständen

$$\begin{aligned} |\pi^0\pi^0\rangle_{\text{sym}} &= |\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\ |\pi^+\pi^-\rangle_{\text{sym}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\ |\pi^+\pi^0\rangle_{\text{sym}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1\rangle \end{aligned}$$

Eine allgemeine **Streuamplitude** ist nun als Skalarprodukt der zeitlich propagierten einlaufenden Teilchen und auslaufenden Teilchen gegeben, d.h. durch

$$A = \underbrace{\langle \pi^a\pi^b; t_f |}_{\langle f |} \hat{U}_I(t_f, t_i) \underbrace{|\pi^a\pi^b; t_i\rangle}_{|i\rangle}_{\text{sym}}$$

wobei \hat{U}_I den Zeitentwicklungsoperator des Wechselwirkungsbilds bezeichnet. Da $SU(2)$ eine Symmetrie des betrachteten Systems ist, erfüllt der Zeitentwicklungsoperator

$$\exp(-i\theta^a T^a) \hat{U}_I \exp(i\theta^a T^a) = \hat{U}_I,$$

und damit vertauscht offenbar $[T^a, \hat{U}_I] = 0$, womit auch $[\sum_a (T^a)^2, \hat{U}_I] = 0$ folgt. Mit dem dritten $SU(2)$ -Generator T^3 , der die dritte Isospin-Komponente liefert, folgt dann

$$I_3^{(f)} \langle f | \hat{U}_I | i \rangle = \langle f | T^3 \hat{U}_I | i \rangle = \langle f | \hat{U}_I T^3 | i \rangle = I_3^{(i)} \langle f | \hat{U}_I | i \rangle,$$

also gilt $I_3^{(f)} = I_3^{(i)}$. Für den Isospin selbst folgt ähnlich

$$I^{(f)}(I^{(f)} + 1) \langle f | \hat{U}_I | i \rangle = \left\langle f \left| \sum_a (T^a)^2 \hat{U}_I \right| i \right\rangle = \dots = I^{(i)}(I^{(i)} + 1) \langle f | \hat{U}_I | i \rangle,$$

sodass man auch hier $I^{(f)} = I^{(i)}$ erhält. Der Isospin (bzw. das Isospin-Quadrat in Analogie zum normalen Spin) sowie seine dritte Komponenten bleiben also in Streuprozessen erhalten.

Bemerkung: Außerdem kann man zeigen, dass für einen gegebenen Isospin I die Streuamplitude unabhängig von I_3 ist. Mit \hat{I}_\pm seien die Isospin-Operatoren bezeichnet, welche die dritte Komponente I_3 in einem Zustand $|I, I_3\rangle$ um eins erhöhen bzw. verringern, wobei für die Normierung dabei

$$\hat{I}_\pm |I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3 \pm 1)} |I, I_3 \pm 1\rangle$$

gilt, vgl. Abschnitt 3.4.3 auf Seite 37. Zudem erfüllen die Isospin-Operatoren die Vertauschungsrelation $[\hat{I}_\pm, \hat{U}_1] = 0$ mit dem Zeitentwicklungsoperator, sodass dann trivial

$$\begin{aligned} \sqrt{I(I+1) - (I_3 - 1)((I_3 - 1) + 1)} \langle I, I_3 | \hat{U}_1 | I, I_3 \rangle &= \langle I, I_3 | \hat{U}_1 \hat{I}_+ | I, I_3 - 1 \rangle \\ &= \langle I, I_3 | \hat{I}_+ \hat{U}_1 | I, I_3 - 1 \rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3 - 1)} \langle I, I_3 - 1 | \hat{U}_1 | I, I_3 - 1 \rangle \end{aligned}$$

folgt, also die Invarianz der Übergangsamplitude von der I_3 -Isospin-Komponente.

Mit anderen Worten gibt es also nur *zwei unabhängige Amplituden*

$$A_2 = \langle 2, 0 | \hat{U}_1 | 2, 0 \rangle \quad \text{und} \quad A_0 = \langle 0, 0 | \hat{U}_1 | 0, 0 \rangle ,$$

sodass dann die einzelnen Streuamplituden durch

$$\begin{aligned} A(\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{2}{3} A_2 + \frac{1}{3} A_0 \\ A(\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \frac{1}{6} A_2 + \frac{1}{3} A_0 \\ A(\pi^+ \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= \frac{1}{2} A_2 \end{aligned}$$

gegeben sind. Der Wirkungsquerschnitt σ ist dann als Betragsquadrat $|A(\pi^a \pi^b \rightarrow \pi^a \pi^b)|^2$ gegeben.

3.6.3 Symmetriebrechende Zerfälle

Die $SU(3)$ - bzw. Isospin-Invarianz ist leider keine exakte Symmetrie der Natur, sondern wird durch die schwache Wechselwirkung verletzt. Trotzdem spielt sie aber auch in solchen Prozessen eine wichtige Rolle. Das Schlüsselglied ist hier das sogenannte **Wigner-Eckart-Theorem**, auf das wir aber nicht näher eingehen werden. Obwohl dieses ein sehr allgemeines Konzept liefert, beschränken wir uns auf den Fall der Isospin-Invarianz $SU(2)$, wobei die Ergebnisse bereits aus der Drehimpuls-Algebra der gewöhnlichen Quantenmechanik bekannt sind.

Wir betrachten jetzt also eine Amplitude der Form $A = \langle f | \hat{H}_1 | i \rangle$ wo \hat{H}_1 nicht invariant unter $SU(2)$ -Transformationen ist, d.h. die Generatoren vertauschen gemäß $[T^a, \hat{H}_1] \neq 0$ nicht miteinander. \hat{H}_1 kann aber immer noch zu irreduziblen Darstellungen ausreduziert werden (ÜBUNGEN). Diese bilden dann zusammen mit dem Zustand $|i\rangle$ direkte Produkte von Darstellungen, die wiederum zu irreduziblen Darstellungen ausreduziert werden können, um zu sehen, welche der letzteren mit der Darstellung von $\langle f |$ übereinstimmen, d.h. es gilt (ÜBUNGEN 9.3)

$$\langle J, J_3 | (\hat{H}_1)_{I' I'_3} | I, I_3 \rangle \underbrace{\langle J, J_3 | (|I', I'_3\rangle | I, I_2 \rangle)}_{\text{Clebsch-Gordan}} \times A(I, I', J) ,$$

wobei $A(I, I', J)$ von J_3, I'_3 und I_3 unabhängig ist.

Beispiel: Betrachten wir als Beispiel für symmetriebrechende Zerfallsprozesse die Pionen und Kaonen, deren Isospin-Zustände zur Übersicht noch einmal gelistet werden sollen:

$$\begin{aligned}
 |\pi^0\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle & |K^+\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle & (\text{mit } \bar{s}) \\
 |\pi^+\pi^-\rangle_{\text{sym}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle & |K^-\rangle &= -|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle & (\text{mit } s) \\
 |\pi^+\pi^0\rangle_{\text{sym}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle & |K^0\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle & (\text{mit } \bar{s}) \\
 & & |\bar{K}^0\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle & (\text{mit } s)
 \end{aligned}$$

Der physikalische neutrale Kaon-Zustand ist dabei eigentlich durch $|K_s^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$ gegeben. Man kann aber durch Verwendung der CP-Invarianz zeigen, dass die Amplitude für $|K_s^0\rangle$ von der Amplitude für $|K^0\rangle$ durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $\sqrt{2}$ erreicht werden kann. Daher betrachten wir einfach $|K^0\rangle$.

Um Kaonen-Zerfälle zu vermitteln, muss \hat{H}_I in einer Darstellung mit $I' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ vorliegen (ÜBUNGEN 7.3). Der Fall $I' = \frac{5}{2}$ ist allerdings (nach dem Fermi-Modell) in der Natur nicht vorhanden. (ÜBUNGEN ?) Seien

$$A_{\Delta I=\frac{3}{2}} = \langle 2,0|\hat{H}_I|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad \text{und} \quad A_{\Delta I=\frac{1}{2}} = \langle 0,0|\hat{H}_I|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

die zugehörigen Amplituden für eine Änderung um $\Delta I = \frac{1}{2}$ bzw. $\Delta I = \frac{3}{2}$. Es stellt sich dann die Frage, wie die physikalischen Zerfallsamplituden

$$\langle \pi^0\pi^0|\hat{H}_I|K_s^0\rangle, \quad \text{sym}\langle \pi^+\pi^-|\hat{H}_I|K_s^0\rangle \quad \text{und} \quad \text{sym}\langle \pi^+\pi^0|\hat{H}_I|K^+\rangle$$

aussehen. Betrachten wir dann für die erste dieser Zerfallsamplituden explizit

$$\langle \pi^0\pi^0|\hat{H}_I|K_s^0\rangle = \sqrt{2}\langle \pi^0\pi^0|\hat{H}_I|K^0\rangle = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 2,0| - \sqrt{\frac{1}{2}}\langle 0,0|\right)\hat{H}_I|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$$

dann folgt unter Verwendung des Wigner-Eckart-Theorems und der Clebsch-Gordan-Zerlegung

$$\begin{aligned}
 \langle 2,0|\hat{H}_I|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= A_{\Delta I=\frac{3}{2}} = \underbrace{\langle 2,0|\left(|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) \\
 \langle 0,0|\hat{H}_I|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= A_{\Delta I=\frac{1}{2}} = \underbrace{\langle 0,0|\left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\left(\frac{1}{2}, 0\right)
 \end{aligned}$$

für die einzelnen Summanden, sodass man als Zerfallsamplitude schließlich

$$\langle \pi^0\pi^0|\hat{H}_I|K_s^0\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}A_{\Delta I=\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}A_{\Delta I=\frac{1}{2}}$$

erhält. Die übrigen Amplituden sind (ÜBUNGEN 9.4).

4 Die Gruppe der Lorentz-Transformationen

4.1 Lorentz-Gruppe und $SL(2, \mathbb{C})$

4.1.1 Bestandteile der Lorentz-Gruppe

Im Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie spielen die sogenannten Lorentz-Transformationen eine sehr wichtige Rolle. Die **Lorentz-Gruppe** $\mathcal{L} := O(3, 1)$ haben wir bereits im zweiten Kapitel als die Invarianzgruppe

$$\mathcal{L} = \{ \Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) : \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \text{ mit } \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \}$$

eingeführt, deren enthaltene Transformationen das durch die Minkowski-Matrix induzierte Lorentz-Skalarprodukt invariant lassen. Im Detail heißt dies, dass das Skalarprodukt

$$(x, y) := x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^3 x^i y^i = -x^0 y^0 + \vec{x} \cdot \vec{y}$$

unter der Transformation $x \rightarrow x' = \Lambda x$ und $y \rightarrow y' = \Lambda y$ invariant bleibt. Aus der komponentenweisen Darstellung der Invarianzgleichung folgt direkt

$$(x', y') = (x, y) \iff \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} .$$

In der Teilchenphysik verwendet man oft $-\eta$ statt η als Metrik, dies werden wir im Folgenden ebenfalls tun, d.h. von nun an sei $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Die Eigenschaften der Gruppe \mathcal{L} bleiben dabei natürlich unverändert. Für die Dimension der Gruppe gilt

$$\dim \mathcal{L} = \dim O(4) = \frac{4 \cdot (4 - 1)}{2} = 6 .$$

Die Lorentz-Gruppe bzw. die Menge der Lorentz-Transformationen enthält drei wichtige Spezialfälle von Transformationen, die wir im Einzelnen betrachten:

- *Drehungen:* Bei den Drehungen wird in der Matrix Λ nur der räumliche Teil über eine Drehung transformiert, d.h. die Lorentz-Transformations-Matrix kann als

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \quad \text{für} \quad R \in SO(3)$$

geschrieben werden. Drehungen hängen dabei von drei Parametern ab: Einem Einheitsvektor \vec{u} , der die Drehachse angibt (zwei Parameter), und einem Drehwinkel θ (ein Parameter), d.h. Drehungen $R = R(\hat{u}, \theta)$ sind durch drei Parameter charakterisiert. Diese Transformation kann auch explizit durch

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ \vec{x}' &= \cos(\theta) \vec{x} + (1 - \cos(\theta)) (\hat{u} \cdot \vec{x}) \hat{u} + \sin(\theta) \hat{u} \times \vec{x} \end{aligned}$$

angegeben werden.

- *Spezielle Lorentz-Transformationen (Boosts)*: Boosts hängen ebenfalls von drei Parametern ab: Zum einen dem Einheitsvektor \vec{n} der Boostrichtung (zwei Parameter) und der relativen Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ in natürlichen Einheiten, also

$$B = B(\hat{n}, \eta) \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)$$

als **Rapidity**. In Koordinaten sieht diese Boost-Transformation dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \cosh(\eta)x^0 + \sinh(\eta)\hat{n} \cdot \vec{x} \\ \vec{x}' &= \vec{x} - (\hat{n} \cdot \vec{x})\hat{n} + [\sinh(\eta)x^0 + \cosh(\eta)\hat{n} \cdot \vec{x}]\hat{n} . \end{aligned}$$

- *Diskrete Lorentz-Transformationen*: Neben den beiden oben erwähnten kontinuierlichen dreiparametrischen Lorentz-Transformationen existieren noch die folgenden drei diskreten Lorentz-Transformationen:

- Raumspiegelung: $I_P = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$, d.h. $x^0 \rightarrow x^0, \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$
- Zeitumkehr: $I_T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, d.h. $x^0 \rightarrow -x^0, \vec{x} \rightarrow \vec{x}$
- Raumspiegelung: $I_{PT} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, d.h. $x^0 \rightarrow -x^0, \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$

Bemerkung: Die drei diskreten Lorentz-Transformationen zusammen mit der Identität, bilden eine Untergruppe $S = \{ \mathbb{1}, I_P, I_T, I_{PT} \}$ von \mathcal{L} . Diese ist insbesondere zu der Gruppe $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorph. In S kann man weitere zweielemente Untergruppen durch die Paare mit $\mathbb{1}$ bilden.

4.1.2 Topologie der Lorentz-Gruppe

Es stellt sich nun die Frage nach der Topologie der Menge der Lorentz-Transformationen, d.h. welche grobe Form die Mannigfaltigkeit der Lie-Gruppe hat. Wenden wir die Determinante auf die Invarianzgleichung $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ unter Verwendung der Determinantenmultiplikationsformel an, so folgt $(\det \Lambda)^2 = 1$. Die Lorentz-Transformationen mit $\det(\Lambda) = +1$ nennt man **eigentliche Lorentz-Transformationen**.

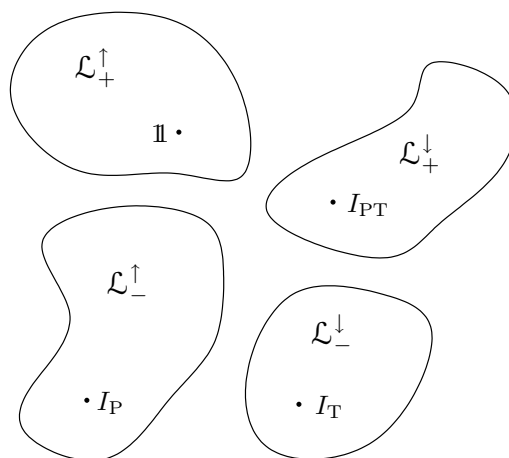


Abbildung 4.1: Darstellung der Zusammenhangskomponenten der Lorentz-Gruppe

Aus der Invarianz-Gleichung folgt für die erste Komponente außerdem

$$[\Lambda^T \eta \Lambda]_{00} = 1 \iff (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1 \iff (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 ,$$

d.h. man kann zwischen **orthochronen Lorentz-Transformationen** \mathcal{L}^\uparrow mit $\Lambda^0_0 \geq 1$ und **antichronen Lorentz-Transformationen** \mathcal{L}^\downarrow mit $\Lambda^0_0 \leq -1$ unterscheiden.

Insgesamt zerfällt die Gruppenmannigfaltigkeit der Lorentz-Gruppe \mathcal{L} somit in vier Zusammenhangskomponenten

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\uparrow_+ \cup \mathcal{L}^\uparrow_- \cup \mathcal{L}^\downarrow_+ \cup \mathcal{L}^\downarrow_- ,$$

von denen jede eine der drei diskreten Transformationen bzw. die Identität (Einheitsmatrix) enthält:

4.1.3 Homomorphismus von \mathcal{L}^\uparrow_+ und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

Um die irreduziblen Darstellungen der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe \mathcal{L}^\uparrow_+ zu finden, zeigen wir zuerst, dass \mathcal{L}^\uparrow_+ homomorph zu $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist, d.h. zu den komplexen 2×2 -Matrizen mit $\det A = 1$. Dann klassifizieren wir die irreduziblen Darstellungen der $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Diese Vorgehensweise ist prinzipiell eine Verallgemeinerung unserer Untersuchung der Beziehung zwischen $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathrm{SU}(2)$, vgl. Abschnitt 2.2.5 auf Seite 10.

- Wir betrachten zuerst die Menge $H_2 = \{A \in \mathbb{M}(2, \mathbb{C}) : A^\dagger = A\}$ der selbstadjungierten 2×2 -Matrizen. Es seien

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Einheitsmatrix und die Pauli-Matrizen. Jede selbstadjungierte Matrix $A \in H_2$ kann dann als

$$A = x^0 \sigma_0 + \sum_i x^i \sigma_i = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

geschrieben werden, wobei jedes $x^\mu \in \mathbb{R}$ für $\mu = 0, \dots, 3$ liegt. Insbesondere gilt in dieser Darstellung

$$\det A = (x^0 + x^3)(x^0 - x^3) - (x^1 + ix^2)(x^1 - ix^2) = (x^0)^2 - \sum_i (x^i)^2 = x^\mu x_\mu .$$

- Diese Abbildung $\mathbb{R}^4 \longrightarrow H_2$ mit $x^\mu \mapsto A$ ist bijektiv. Für gegebenes x^μ erfolgt die Konstruktion von A nach dem obigen Schema - die Selbstadjungiertheit ist offensichtlich. Ist umgekehrt eine selbstadjungierte Matrix A gegeben, so definieren wir zunächst

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 , \quad \bar{\sigma}_i = -\sigma_i \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}^0 = \sigma_0 , \quad \bar{\sigma}^i = \sigma_i ,$$

dann lassen sich die x^μ durch $x^\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu A)$ darstellen, wie man schnell nachprüft.

3. Sei nun $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix mit $\det M = 1$. Wir betrachten die Ähnlichkeitstransformation $A \rightarrow A' = MAM^\dagger$ für $A \in H_2$, dann gilt

$$(A')^\dagger = MA^\dagger M^\dagger = MAM^\dagger = A' , \quad (4.2)$$

also liegt auch $A' \in H_2$. Folglich gibt es $x'^\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu A') \in \mathbb{R}$, mit denen sich A' gemäß der obigen Parametrisierung darstellen lässt. Insbesondere ist eine Ähnlichkeitstransformation gemäß

$$(\alpha A + \beta B)' = M(\alpha A + \beta B)M^\dagger = \alpha A' + \beta B'$$

linear, wir schreiben also $x'^\mu = [\Lambda(M)]^\mu{}_\nu x^\nu$.

4. Die so induzierte Transformation $\Lambda(M)$ ist eine Lorentz-Transformation, wie wir jetzt zeigen. Es gilt zum einen

$$x'^\mu x'_\mu = \det(MAM^\dagger) = |\det M|^2 \det A = \det A = x^\mu x_\mu .$$

Weil diese Invarianz für alle x gilt, folgt auch

$$x'^\mu y'_\mu = \frac{1}{2}(x'^\mu y'_\mu + y'^\mu x'_\mu) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(x' + y')^\mu (x' + y')_\mu}_{(x+y)^\mu (x+y)_\mu} - \underbrace{x'^\mu x'_\mu}_{x^\mu x_\mu} - \underbrace{y'^\mu y'_\mu}_{y^\mu y_\mu} \right] = x^\mu y_\mu ,$$

also bleibt das Lorentz-Skalarprodukt invariant.

5. Es stellt sich die Frage, wie man die Transformationsmatrix $[\Lambda(M)]^\mu{}_\nu$ bestimmen kann. Dazu betrachte

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu MAM^\dagger) = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu Mx^\nu \sigma_\nu M^\dagger) = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger) x^\nu ,$$

dann folgt $[\Lambda(M)]^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger)$.

6. Aus $[\Lambda(M)]^0{}_0 = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(MM^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (M_{1i} M_{1i}^* + M_{2i} M_{2i}^*) \geq 0$ folgt zudem noch $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow$, also beschreiben wir so orthochrone Lorentz-Transformationen.

7. Die $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend, während die Determinante $\det \Lambda(M)$ eine stetige Funktion von M ist. Da wir bereits wissen, dass $\Lambda(M)$ eine Lorentz-Transformation ist, gilt $\det \Lambda(M) = \pm 1$. Aus dem Spezialfall $\Lambda(\mathbb{1}) = \delta^\mu{}_\nu$ folgt dann $\det \Lambda = +1$ für alle M , also ist $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow_+$ eine eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation.

8. Zuletzt bleibt noch zu zeigen, dass $f : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}^\uparrow_+$ mit $M \mapsto \Lambda(M)$ tatsächlich einen Homomorphismus beschreibt, d.h. wir müssen noch die Eigenschaft $f(ab) = f(a)f(b)$ nachprüfen. Dazu betrachte mit (4.1) und (4.2)

$$\begin{aligned} \sigma_\mu (\Lambda(MM')^\mu{}_\nu x^\nu) &= MM'(\sigma_\nu x^\nu) [MM']^\dagger = \overbrace{MM'(\sigma_\nu x^\nu) M'^\dagger}^{\sigma_\rho \Lambda(M')^\rho{}_\nu x^\nu} M^\dagger \\ &= \sigma_\mu \Lambda(M)^\mu{}_\rho \Lambda(M')^\rho{}_\nu x^\nu , \end{aligned}$$

dann folgt direkt die Homomorphie-Eigenschaft $\Lambda(MM')^\mu{}_\nu = \Lambda(M)^\mu{}_\rho \Lambda(M')^\rho{}_\nu$.

FAZIT: Die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ hat dieselbe Struktur wie die eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen \mathcal{L}^\uparrow_+ , sodass es genügt, die irreduziblen Darstellungen der $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ zu finden.

4.2 Irreduzible Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$

Weil \mathcal{L}_+^\uparrow und $SL(2, \mathbb{C})$ homomorph zueinander sind, haben die entsprechenden Lie-Algebren dieselben Strukturen. Somit sind die Vertauschungsrelationen, die Cartan-Unteralgebra und die Gewichtsdiagramme der irreduziblen Darstellungen identisch. Wir bestimmen diese nun für die $SL(2, \mathbb{C})$.

Bemerkung: Die $SL(2, \mathbb{C})$ ist nicht kompakt, d.h. die Darstellungen sind nicht unbedingt unitär. Folglich sind auch die Generatoren nicht automatisch hermitesche Matrizen. Die Cartan-Unteralgebra spielt aber dennoch eine ähnliche Rolle.

4.2.1 Die Lorentz-Algebra

Zunächst stellt sich die Frage, wie überhaupt die Generatoren aussehen. Wir schreiben zunächst einfach $M = \exp(i\theta^a T^a)$, dann folgt aus

$$\det M = 1 = \exp(i\theta^a \operatorname{Sp}(T^a)) \quad \implies \quad \operatorname{Sp}(T^a) = 0$$

dass die Generatoren T^a spurlos sind. Eine allgemeine komplexe spurlose 2×2 -Matrix $i\theta^a T^a$ ist von der Form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Re a + i \Im a & \Re b + i \Im b \\ \Re c + i \Im c & -\Re a - i \Im a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Re a + i \Im a & \frac{1}{2}(\Re b + \Re c) + \frac{1}{2}(\Re b - \Re c) + \frac{1}{2}(\Im b + \Im c) + \frac{1}{2}(\Im b - \Im c) \\ \frac{1}{2}(\Re c + \Re b) + \frac{1}{2}(\Re c - \Re b) + \frac{1}{2}(\Im c + \Im b) + \frac{1}{2}(\Im c - \Im b) & -\Re a - i \Im a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\Re b + \Re c) \cdot \sigma_1 + \frac{1}{2}(\Im b + \Im c) \cdot i\sigma_1 + \frac{1}{2}(\Im c - \Im b) \cdot \sigma_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Re b - \Re c) \cdot i\sigma_2 + \Re a \cdot \sigma_3 + \Im a \cdot i\sigma_3, \end{aligned}$$

d.h. man erhält 6 reelle Parameter. Wir konstruieren nun zwei schiefsymmetrische 4×4 -Matrizen durch die Definition folgender Größen

$$\begin{array}{llll} Z_{23} = -\frac{i}{2}\sigma_1 & Z_{10} = -\frac{1}{2}\sigma_1 & \theta^{23} = -(\Im b + \Im c) & \theta^{10} = -(\Re b + \Re c) \\ Z_{31} = -\frac{i}{2}\sigma_2 & Z_{20} = -\frac{1}{2}\sigma_2 & \theta^{31} = (\Re c - \Re b) & \theta^{20} = (\Im b - \Im c) \\ Z_{12} = -\frac{i}{2}\sigma_3 & Z_{30} = -\frac{1}{2}\sigma_3 & \theta^{12} = -2\Im a & \theta^{30} = -2\Re a \\ \text{mit } Z_{\nu\mu} = -Z_{\mu\nu} & & \text{mit } \theta^{\nu\mu} = -\theta^{\mu\nu} & \end{array} \quad \text{und}$$

dann kann die Matrix M kurz als $M = \exp(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} Z_{\mu\nu})$ geschrieben werden. Ausgehend von der Vertauschungsrelation $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ der Pauli-Matrizen können die Vertauschungsrelationen der $Z_{\mu\nu}$ bestimmt werden:

$$\begin{array}{llll} [Z_{23}, Z_{21}] = 0 & [Z_{23}, Z_{31}] = Z_{12} & [Z_{23}, Z_{12}] = -Z_{31} & \\ [Z_{23}, Z_{10}] = 0 & [Z_{23}, Z_{20}] = Z_{30} & [Z_{23}, Z_{30}] = -Z_{20} & \text{usw.} \end{array}$$

Alle diese Vertauschungsrelationen lassen sich zu einer einzigen Vertauschungsrelation

$$[Z_{\mu\nu}, Z_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho}Z_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}Z_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}Z_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}Z_{\nu\rho}$$

zusammenfassen, diese definiert die **Lorentz-** bzw. **$SL(2, \mathbb{C})$ -Algebra** vollständig. Eine andere Schreibweise für die Lorentz-Algebra bzw. die durch sie dargestellte Lorentz-Gruppe ist

$$M = \exp \left[i \frac{\theta^{\mu\nu}}{2} (-iZ_{\mu\nu}) \right] \quad \text{mit}$$

$$[(-iZ_{\mu\nu}), (-iZ_{\rho\sigma})] = i \underbrace{\left(\eta_{\mu\rho} \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\sigma}^{\beta} + \eta_{\nu\sigma} \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\rho}^{\beta} - \eta_{\nu\rho} \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\sigma}^{\beta} - \eta_{\mu\sigma} \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\rho}^{\beta} \right)}_{\text{Strukturkonstanten}} (-iZ_{\alpha\beta}) .$$

4.2.2 Cartan-Unteralgebra und Darstellungen

Da wir für die Lorentz-Algebra sechs Generatoren haben, die mit den Pauli-Matrizen verknüpft sind, besteht die Menge der Generatoren offensichtlich aus zwei Kopien der $SU(2)$, d.h. es gilt $SL(2, \mathbb{C}) \sim SU(2) \times SU(2)$. Die Darstellungen¹ werden deshalb mit $D(J_1, J_2)$ bezeichnet, wobei $J_1, J_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ laufen. Für die Dimension einer solchen Darstellung gilt

$$\dim D(J_1, J_2) = (2J_1 + 1)(2J_2 + 1) , .$$

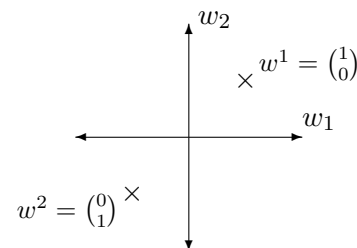
Die Matrizen H_i der Cartan-Unteralgebra werden immer als hermitesch definiert - dies verlangt eine **komplexe Erweiterung** der Lie-Algebra, d.h. wir erlauben auch komplexe Linearkombinationen. Die Normierungsbedingung der Cartan-Unteralgebra-Generatoren bleibt $\text{Sp}(H_i^2) = \frac{1}{2}$.

Beispiel: Zur Veranschaulichung betrachten wir nun einige konkrete Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ zusammen mit den zugehörigen Generatoren:

- $D(\frac{1}{2}, 0)$: Wähle hier die beiden Matrizen

$$H_1 = iZ_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_2 = -Z_{30} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

als Generatoren der Cartan-Unteralgebra, dann erhalten wir das Gewichtsdiagramm

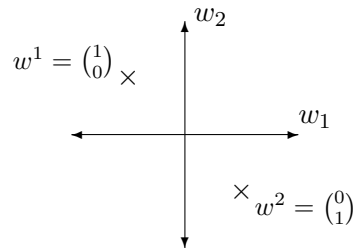


- $D(0, \frac{1}{2})$: In der konjugierten Darstellung gilt $Z_{12} \rightarrow -Z_{12}$, sodass man als Generatoren

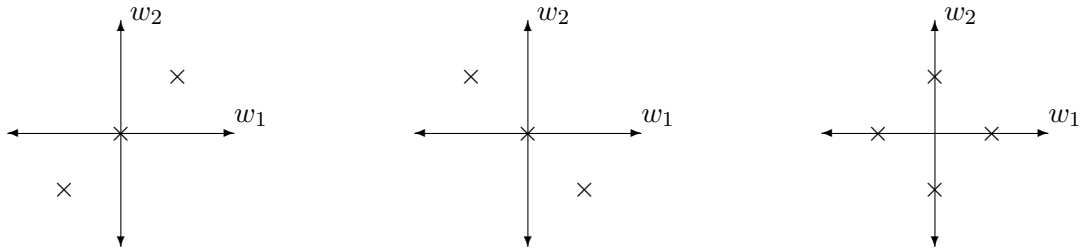
$$H_1 = i(-Z_{12}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_2 = -Z_{30} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

erhält, diese führen zum folgenden Gewichtsdiagramm:

¹Man beachte, dass wir zwei Kopien der zugrundeliegenden Lie-Gruppe $SU(2)$ betrachten, also $SU(2) \times SU(2)$. Die zugehörige Lie-Algebra ist durch $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ gegeben, d.h. wir haben sechs Generatoren, genau wie in $SL(2, \mathbb{C})$. Die zugehörigen Darstellungen von $SU(2) \times SU(2)$ sind durch das direkte Produkt der Einzeldarstellungen der $SU(2)$ gegeben.



- Die Darstellungen $D(1, 0)$, $D(0, 1)$ und $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ der $SL(2, \mathbb{C})$ sind



Die am häufigsten verwendete vierdimensionale Darstellung der Lorentz-Algebra ist durch die **Dirac-Matrizen** γ_μ gegeben, welche die Clifford-Algebra $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_4$ lösen. In der üblichen Weyl-Darstellung gilt

$$\gamma_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_2 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_2 \end{array} \right) \quad \gamma_k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\sigma_k \\ \hline \sigma_k & 0 \end{array} \right),$$

bzw. ganz explizit mit den entsprechenden Pauli-Matrizen σ_k ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei auch die Indizes der γ -Matrizen durch $\eta^{\mu\nu}$ hoch- und runtergezogen werden. Aus den Dirac-Matrizen ergibt sich dann durch $\mathcal{D}(Z_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ die vierdimensionale Darstellung der Lorentz-Algebra.

4.2.3 Entsprechende Physik der Lorentz-Invarianz

Es wird vermutet, dass die Lorentz-Invarianz eine exakte Symmetrie der Natur ist.² Die Felder unserer (Lorentz-invarianten) Theorie sollten daher als irreduzible Darstellungen transformiert werden, und ihre Kombination (die Lagrange-Dichte) sollte invariant sein.

Beispiel: • $D(0, 0)$ liefert uns eine eindimensionale Darstellung, d.h. ein **Skalarfeld**.

- $D(\frac{1}{2}, 0)$ und $D(0, \frac{1}{2})$ sind zwei verschiedene Arten von zweidimensionalen Darstellungen, d.h. zwei Arten von **Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen**. Diese lassen sich als links- und rechts-händige Fermionen interpretieren, d.h. in der Wahl der Darstellungen verbirgt sich u.a. auch die

²Mehrere moderne Experimente zielen allerdings darauf ab, Verletzungen dieser Symmetrie auf mikroskopischen Größenskalen nachzuweisen.

Chiralität. Wie aber können wir eine invariante Größe dieser Fermionen bilden? Für eine Matrix $M \in SL(2, \mathbb{C})$ gilt dann

$$\psi'_\alpha = M_\alpha^\beta \psi_\beta$$

als Transformationsgleichung. Betrachte dazu

$$\epsilon^{\alpha\beta} \psi'_\alpha \psi'_\beta = \underbrace{\epsilon^{\alpha\beta} M_\alpha^\gamma M_\beta^\delta}_{\det M \cdot \epsilon^{\gamma\delta}} \psi_\gamma \psi_\delta = \epsilon^{\gamma\delta} \psi_\gamma \psi_\delta ,$$

d.h. $\epsilon^{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta$ ist ein Lorentz-invariantes Objekt. Auf den ersten Blick erscheint diese Invarianz wegen

$$\epsilon^{\gamma\delta} \psi_\gamma \psi_\delta = \psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1$$

trivial, da die letzte Summe verschwinden sollte. Dies ist aber nicht der Fall, da Fermionen durch antikommutierende **Grassmann-Variablen** (d.h. $ab = -ba$) beschrieben werden.

- $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist eine vierdimensionale Darstellung, die uns ein Lorentz-invariantes **Vektorfeld** A_μ liefert. Eine invariante Größe ist hier beispielsweise durch $A^\mu A_\mu$ gegeben. Warum aber ist ein solches Feld (umgekehrt gedacht) durch $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gegeben? Dazu betrachte die bereits bekannte Identität $M \sigma_\nu M^\dagger = \sigma_\rho \Lambda^\rho{}_\nu$ und das Transformationsverhalten von $B_\nu = \psi^\dagger \sigma_\nu \chi$

$$B'_\nu = (\psi')^\dagger \sigma_\nu \chi' = B_\rho \Lambda^\rho{}_\nu$$

falls $\chi' = M^\dagger \chi$ und $(\psi')^\dagger = \psi^\dagger M$ gilt, d.h. zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Spinoren ergeben tatsächlich ein Vektorfeld.

5 Globale Gruppeneigenschaften

In diesem Kapitel wollen wir näher auf allgemeine globale Eigenschaften von Gruppen eingehen und einige weitere algebraische Hilfsmittel betrachten. Zuletzt führen wir noch die Ausreduktion mit Charakteren ein.

5.1 Algebraische Eigenschaften

5.1.1 Zentrum, Faktorgruppe, etc.

Sei M eine Menge und $\text{Perm}(M)$ die Menge der invertierbaren Abbildung von M in sich selbst.¹ Es geht also nun um eine Verallgemeinerung des bisher betrachteten linearen Darstellungstheorie: Dort war M ein Vektorraum V und $\text{Perm}(M)$ die Gruppe der linearen invertierbaren Operatoren $\text{GL}(V)$.

DEFINITION 21: Die Gruppe G **wirkt von links** auf M falls es einen Gruppenhomomorphismus $L : G \rightarrow \text{Perm}(M)$ mit $g \mapsto L_g \in \text{Perm}(M)$ gibt, d.h. $(L_{g_2} \cdot L_{g_1})(x) = L_{g_2}(L_{g_1}(x)) = L_{g_2 \cdot g_1}(x)$.

Wir notieren kurz $L_g(x) = gx$ für diesen Homomorphismus. Die Wirkung von rechts wird analog durch $R_{g_2}(R_{g_1}(x)) = R_{g_1 \cdot g_2}(x)$ definiert, für sie steht entsprechend $Rg(x) = xg$.

DEFINITION 22: Die **Bahn** bzw. **Orbit** von x ist durch $O_x = \{L_g(x) : g \in G\}$ definiert.

DEFINITION 23: Die Menge $G_x = \{g \in G : L_g(x) = x\}$ nennen wir **kleine Gruppe** von x , sie enthält die Elemente von G , die als Identität auf M wirken.

Jede kleine Gruppe G_x ist insbesondere eine Untergruppe von G . Um dies zu zeigen, sind die Gruppenaxiome zu prüfen:

1. *Abgeschlossenheit*: Sind $h_1, h_2 \in G_x$, so gilt $L_{h_1 \cdot h_2}(x) = L_{h_1}(L_{h_2}(x)) = L_{h_1}(x) = x$, d.h. es ist auch $h_1 \cdot h_2 \in G_x$.
2. *Assoziativität*: Trivial, da G als Gruppe eine assoziative Verknüpfung hat.
3. *Einselement*: Betrachte $L_g(x) = L_{e \cdot g}(x) = L_e(L_g(x))$, so ist klar, dass L_e die Identitätsabbildung ist.
4. *Inverse Elemente*: Für $h \in G_x$ gilt $x = L_e(x) = L_{h^{-1} \cdot h}(x) = L_{h^{-1}}(L_h(x)) = L_{h^{-1}}(x)$, also ist auch das Inverse $h^{-1} \in G_x$.

DEFINITION 24: Es ist \sim eine **Äquivalenzrelation** („verallgemeinerter Vergleichsoperator“) in einer Menge, falls die drei Axiome

1. *Reflexivität*: $a \sim a$.

¹Dabei wird in $\text{Perm}(M)$ zunächst (außer der Invertierbarkeit) keinerlei Anforderungen an die Arten der Permutationen gestellt - sie müssen weder stetig bzw. differenzierbar, noch fixpunktfrei o.ä. sein.

2. *Symmetrie*: Aus $a \sim b$ folgt $b \sim a$.
3. *Transitivität*: Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$.

erfüllt sind. Eine **Äquivalenzklasse** ist dann die Menge aller Elemente, die unter einer Äquivalenzrelation \sim zueinander äquivalent sind.

Die Bahnen bzw. Orbits O_x stellen somit eine Partition der Menge M in disjunkte Äquivalenzklassen dar. Um dies explizit zu sehen, betrachte:

1. L_e entspricht der Identitätsabbildung, also liegt $x \in O_x$.
2. $y \in O_x$ impliziert $y = L_g(x)$ für ein $g \in G$, also liegt $x \in O_y$ wegen $x = L_{g^{-1}}(y)$.
3. Liegen $y \in O_x$ und $z \in O_y$, so liegt wegen $z = L_g(y) = L_g(L_{g'}(x)) = L_{g \cdot g'}(x)$ auch $z \in O_x$.

Die Gruppe kann aber auch auf sich selbst wirken, d.h. $M = G$ und

$$L_g(g') = g \cdot g'.$$

In diesem Fall sind die Orbits durch $O_{g'} = G$ gegeben, weil ein beliebiges Element g'' durch $g = g'' \cdot g'^{-1}$ erreicht werden kann. Eine solche Wirkung nennt man **transitiv**. Eine andere Wirkung von G auf sich selbst ist die sogenannte **Konjugation**

$$L_g(g') = g \cdot g' \cdot g^{-1}.$$

Die zugehörigen Bahnen bzw. Orbits nennt man **Konjugationsklassen** und die Wirkung ist im Allgemeinen nicht transitiv.

DEFINITION 25: Sei H eine Untergruppe. Betrachten wir $R_h(g) = g \cdot h$ für $g \in G$ und $h \in H$. Die Bahnen

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

sind die **Linksnebenklassen** in H von G . Die Menge von Linksnebenklassen bezeichnet man mit G/H , sprich „ G modulo H “.

Jede Linksnebenklasse gH hat dieselbe Anzahl von Elementen $|H|$ falls H endlich ist, denn aus $gh_1 = gh_2$ folgt direkt $h_1 = h_2$, d.h. jedes $h_1 \neq h_2$ führt zu einem neuen Element in der Linksnebenklasse.

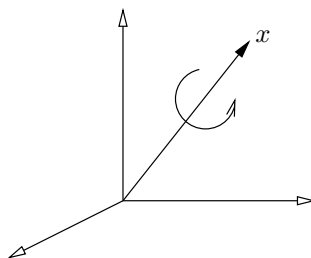


Abbildung 5.1: H enthält die Drehungen um die x -Richtung.

Beispiel: Sei H die kleine Gruppe von Elemente, d.h. die Elemente, welche $x \in \mathbb{R}^3$ invariant lassen. Anschaulich lässt sich H als die Menge der Drehungen um die x -Richtung interpretieren. Dann ist die Menge G/H äquivalent zu den verschiedenen Richtungen von x , d.h. zu der Menge M selbst.

Die zentrale Frage ist nun, ob wir einer Menge G/H eine Gruppenstruktur geben können, d.h. ob wir eine Gruppenmultiplikation definieren können. Der triviale Ansatz $(g_1H) \cdot (g_2H) = g_1 \cdot g_2H$ führt wegen

$$g_1H = g_1 \cdot hH \quad \implies \quad g_1 \cdot h \cdot g_2H \stackrel{?}{=} g_1 \cdot g_2H \quad \implies \quad g_1 \cdot h \cdot g_2 \stackrel{?}{=} g_1 \cdot g_2 \cdot h'$$

zu Problemen, da die notwendigen Gleichheiten nicht unbedingt gegeben sind.

DEFINITION 26: Wir nennen H einen Normalteiler, wenn $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\} = H$ für alle Gruppenelemente g gilt.

Es existiert dann für alle $g \in G$ und $h \in H$ ein $h' \in H$ sodass $ghg^{-1} = h' \iff gh = h'g$ gilt. In diesem Fall ist wegen $h \cdot g_2 = g_2 \cdot h'$ unser obiger Ansatz für eine Gruppenmultiplikation sinnvoll, und damit G/H eine Gruppe, genannt **Faktorgruppe**.

DEFINITION 27: Als **Zentrum** $Z = \{z \in G : zg = gz \text{ für alle } g \in G\}$ bezeichnen wir die Menge der Gruppenelemente, die mit allen anderen vertauschen - Z ist offensichtlich ein Normalteiler.

DEFINITION 28: Sei φ ein Homomorphismus, dann definiere den **Kern** dieser Abbildung als

$$\ker(\varphi) = \{h \in G : \varphi(h) = e\} .$$

Insbesondere gilt $\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g \cdot g^{-1}) = e$, d.h. $\ker(\varphi)$ ist ein Normalteiler.

DEFINITION 29: Sei $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus, dann ist das **Bild** von φ durch die Menge $\text{im}(\varphi) = \{\varphi(g) : g \in G\}$ definiert.

5.1.2 Der Homomorphiesatz

SATZ 30 (**Homomorphiesatz**): Sei $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus, dann gilt $G/\ker(\varphi) \cong \text{im}(\varphi)$. Ein Homomorphismus induziert also einen Isomorphismus.

Beweis. Sei $\Phi : G/\ker(\varphi) \longrightarrow \text{im}(\varphi)$ eine Abbildung mit $\Phi(g\ker(\varphi)) = \varphi(g)$. Dann prüfen wir die folgenden Eigenschaften:

- Φ ist ein Homomorphismus: Dazu betrachte einfach

$$\Phi(g_1H g_2H) = \Phi(g_1 g_2 H) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = \Phi(g_1 H) \cdot \Phi(g_2 H) .$$

- Φ ist durch seine Definition surjektiv.
- Φ ist injektiv: Dazu betrachte $\Phi(g_1 H) = \Phi(g_2 H) \iff \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, dann folgt $e = \varphi(g_1^{-1}) \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1^{-1} g_2)$, also liegt $g_1^{-1} g_2 = h \in \ker(\varphi)$. Dann kann man die zu $g_2 = g_1 h$ umformen, und damit gilt $g_2 H = g_1 H$.

Ein bijektiver Homomorphismus liefert dann ein Isomorphismus. □

FAZIT: Sind zwei Gruppen homomorph zueinander, so haben sie dieselben Lie-Algebren, Gewichtsdigramme, usw. - aber sie sind nicht unbedingt isomorph. Man muss auch einige globale Eigenschaften der Gruppe (wie etwa das Zentrum) betrachten, um sicher zu gehen, dass man durch die Lie-Algebren-Analyse die Darstellungen einer gegebenen Gruppe richtig verstanden hat.

5.2 Ausreduktion mit Charakteren

Wir haben gelernt, dass es Fälle gibt, in denen eine Analyse der Lie-Algebra keine eindeutige Aussage über alle möglichen Darstellungen der Gruppe liefert. Um so mehr gilt dies natürlich für diskrete Gruppen, wo der Begriff der Lie-Algebra überhaupt nicht definiert ist. Wir benötigen also eine andere Methode für die Bestimmung von Darstellungen diskreter Gruppen.

5.2.1 Mittelbildung

DEFINITION 31: Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion von der Gruppe G in die komplexen Zahlen \mathbb{C} . Eine **Mittelbildung** $M[f]$ der Funktion wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

1. *Linearität:* $M[\lambda_1 f_1(g) + \lambda_2 f_2(g)] = \lambda_1 M[f_1(g)] + \lambda_2 M[f_2(g)]$
2. *Positiv definitiv:* Ist $f(g) > 0$, so ist auch $M[f(g)] > 0$.
3. *Invarianz:* $M[f(g)] = M[f(g \cdot g')] = M[f(g' \cdot g)]$ für alle $g' \in G$.
4. *Normierung:* Für $f(g) = 1$ ist $M[f(g)] = 1$.

Diese allgemeine Definition einer Mittelwertbildung kann nun für die einzelnen Gruppentypen konkretisiert werden:

- Für *endliche diskrete* Gruppen verwende

$$M[f(g)] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) .$$

- Für *kontinuierliche* Gruppen entsprechen die Eigenschaften denen des Integralbegriffs. Die Invarianz-Bedingung verlangt dabei $dg = dg \cdot g' = dg' \cdot g$, ein solches Differential bzw. Maß wird als **Haar-Maß** bezeichnet. Normierte Gruppen, d.h. es ist $M[1] = 1 < \infty$, werden als **kompakte Gruppen** bezeichnet.

Beispiel: Die Gruppe $G = \text{U}(1) = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ ist mit $dg = \frac{d\varphi}{2\pi}$ kompakt.

Bemerkung: Im Wesentlichen wurde derselbe Begriff schon zur Konstruktion unitärer Darstellungen verwendet, vgl. Seite 22.

DEFINITION 32: Ein **Charakter** $\chi_{\mathcal{D}}(g)$ einer Darstellung \mathcal{D} ist durch $\chi_{\mathcal{D}}(g) = \text{Sp}(\mathcal{D}(g))$ definiert. Er erfüllt dann die folgenden Eigenschaften:

- $\chi_{\mathcal{D}}(g)$ bleibt invariant unter Ähnlichkeitstransformationen $\mathcal{D}(g) \rightarrow S\mathcal{D}(g)S^{-1}$.
- Für unitäre Darstellungen gilt $\mathcal{D}(g^{-1}) = [\mathcal{D}(g)]^{-1}$ und $\chi_{\mathcal{D}}(g^{-1}) = [\chi_{\mathcal{D}}(g)]^* = \chi_{\mathcal{D}}^*(g)$.
- Für die direkte Summe von Darstellungen gilt $\chi_{\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots}(g) = \chi_{\mathcal{D}_1}(g) + \chi_{\mathcal{D}_2}(g) + \dots$

5.2.2 Die Orthogonalitätsrelation für Charaktere

SATZ 33 (Fundamentale Orthogonalitätsrelation für Charaktere): *Steht $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$ für die Äquivalenz zweier Darstellungen, so gilt*

$$M[\chi_{\mathcal{D}'}^*(g)\chi_{\mathcal{D}}(g)] = \langle\langle \chi_{\mathcal{D}'}(g) | \chi_{\mathcal{D}}(g) \rangle\rangle = \begin{cases} 0 & : \mathcal{D}' \not\sim \mathcal{D} \\ 1 & : \mathcal{D}' \sim \mathcal{D} \end{cases} .$$

KOROLLAR 34: 1. *Seien \mathcal{D} eine allgemeine Darstellung, $\{\mathcal{D}^{(i)}\}$ die verschiedenen irreduziblen Darstellungen und n_i die Anzahlen, wie oft $\mathcal{D}^{(i)}$ in \mathcal{D} auftritt. Aus $\chi_{\mathcal{D}} = \sum_i n_i \chi_{\mathcal{D}^{(i)}}$ folgt dann*

$$n_i = \langle\langle \chi_{\mathcal{D}^{(i)}} | \chi_{\mathcal{D}} \rangle\rangle .$$

Mit anderen Worten ist damit das Problem der Ausreduktion gelöst!

2. *Es gilt $\langle\langle \chi_{\mathcal{D}} | \chi_{\mathcal{D}} \rangle\rangle = \sum_i n_i \langle\langle \chi_{\mathcal{D}^{(i)}} | \chi_{\mathcal{D}} \rangle\rangle = \sum_i n_i^2$.*

3. *Es gilt $\langle\langle \chi_{\mathcal{D}} | \chi_{\mathcal{D}} \rangle\rangle = 1$ genau dann, wenn die Darstellung \mathcal{D} irreduzibel ist.*

So erhalten wir also sehr starke Aussagen über Darstellungen. In der Praxis ist $\langle\langle \chi_{\mathcal{D}^{(i)}} | \chi_{\mathcal{D}} \rangle\rangle$ allerdings oft sehr schwierig zu berechnen. Auf jeden Fall müssen wir jetzt aber die Orthogonalitätsrelation beweisen.

Beweis der fundamentalen Orthogonalitätsrelation. 1. Seien \mathcal{D} und \mathcal{D}' zwei irreduzible Darstellungen der Dimensionen d und d' . Falls es uns gelingt die Beziehungen

$$M[\mathcal{D}'_{b'a'}(g^{-1})\mathcal{D}_{ab}(g)] = \begin{cases} 0 & : \mathcal{D}' \not\sim \mathcal{D} \\ \frac{1}{d}\delta_{aa'}\delta_{bb'} & : \mathcal{D}' = \mathcal{D} \end{cases} \quad (5.1)$$

zu beweisen, so folgt die Orthogonalitätsrelation durch $\sum_{a,b=1}^d \sum_{a',b'=1}^{d'} \delta_{ab}\delta_{a'b'}$.

2. Sei $S : V \rightarrow V'$ eine lineare Abbildung zwischen den Darstellungsräumen von \mathcal{D} und \mathcal{D}' , S ist damit also eine $d' \times d$ -Matrix. Betrachten wir dann die Mittelbildung

$$H_{b'b} = M[\mathcal{D}'_{b'a'}(g^{-1})S_{a'a}\mathcal{D}_{ab}(g)] . \quad (5.2)$$

Für ein beliebiges Gruppenelement $g' \in G$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(g')H &= M[\mathcal{D}'(g')\mathcal{D}'(g^{-1})S\mathcal{D}(g)] = M[\mathcal{D}'(g'g^{-1})S\mathcal{D}(g)] \\ &= M[\mathcal{D}'((gg'^{-1})^{-1})S\mathcal{D}(gg'^{-1}g')] \stackrel{M \text{ invariant}}{=} M[\mathcal{D}'(g^{-1})S\mathcal{D}(gg')] \\ &= M[\mathcal{D}'(g^{-1})S\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(g')] = H \cdot \mathcal{D}(g') \end{aligned}$$

3. Betrachten wir nun den Fall $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Nach dem Lemma von Schur (ÜBUNG!!!) ist dann $H = \lambda \mathbb{1}_d$. Nehmen wir dann auf beiden Seiten von Gleichung (5.2) die Spur, so folgt

$$\lambda \cdot d = M[\text{Sp}(\mathcal{D}(g^{-1})S\mathcal{D}(g))] = M[\text{Sp}(\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(g^{-1})S)] = \text{Sp}(S) . \quad (5.3)$$

Sei jetzt $S_{a'a} = \delta_{a'c'}\delta_{ac}$, dann erhalten wir $\text{Sp}(S) = \delta_{cc'}$, und mit der vorigen Gleichung (5.3) folgt daraus dann $\lambda = \frac{1}{d}\delta_{cc'}$. Unter erneuter Verwendung von (5.2) ergibt sich daraus dann

$$\frac{1}{d}\delta_{cc'}\delta_{b'b} = M[\mathcal{D}_{b'e'}(g^{-1})\mathcal{D}_{cb}(g)] ,$$

also ist die Orthogonalitätsrelation für den Fall $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ ok.

4. Nun zum Fall $\mathcal{D}' \not\sim \mathcal{D}$. Gelten $\mathcal{D}' \not\sim \mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'(g)H = H\mathcal{D}(g)$ für alle Gruppenelemente g , so ist nach dem Lemma von Schur $H = 0$. Ist $\det H \neq 0$, so existiert eine inverse Matrix H^{-1} , sodass

$$\mathcal{D}'(g) = H\mathcal{D}(g)H^{-1} = 0$$

folgen würde. Da dies aber als Similaritätstransformation $\mathcal{D}' \sim \mathcal{D}$ implizieren würde, erhielten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung - folglich ist die Annahme $\det H \neq 0$ falsch. Also ist H entweder eine $d \times d$ -Matrix mit $\det H = 0$ (falls $d = d'$ ist), oder ein $d' \times d$ -Matrix mit $d \neq d'$.

Für den weiteren Beweis betrachten wir nun die folgende Fallunterscheidung:

- Sei nun $Hv = 0$, dann ist $H\mathcal{D}(g)v = \mathcal{D}'(g)Hv = 0$, also spannen $\{\mathcal{D}(g)v\}$ einen invarianten Unterraum auf. Da \mathcal{D} nach Voraussetzung irreduzibel ist können zwei Fälle eintreten:
 - Entweder ist $\{\mathcal{D}(g)v\} = 0$. Dann folgt aber aus $H(v_1 - v_2) = 0$ direkt $v_1 - v_2 = 0$, also wäre H injektiv.
 - Es ist $\{\mathcal{D}(g)v\} = V$, dann wäre $Hv = 0$ für alle $v \in V$ und damit $H = 0$.
- Jetzt sei $Hv = v' \neq 0$. Dann ist $\mathcal{D}'(g)v' = \mathcal{D}'(g)Hv = H\mathcal{D}(g)v$, d.h. alle $\{\mathcal{D}'(g)v'\}$ sind von der Form $H \cdot x$ mit $x \in V$. Also spannen die Vektoren $\{\mathcal{D}'(g)v'\}$ einen invarianten Unterraum auf. Da \mathcal{D}' nach Voraussetzung irreduzibel ist, können wieder zwei Fälle eintreten:
 - Es ist $\{\mathcal{D}'(g)v'\} = V'$, dann wären alle $v' \in V'$ von der Form Hx und damit folglich H surjektiv.
 - Gilt stattdessen $\{\mathcal{D}'(g)v'\} = 0$, dann erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme $v' \neq 0$.

Also ist die Abbildung H entweder gleich Null oder injektiv und surjektiv (also bijektiv). Im letzten Fall aber würde dann eine inverse Abbildung H^{-1} existieren, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also gilt $H = 0$.

Jetzt wählen wir wieder $S_{a'a} = \delta_{a'c}\delta_{ac}$ in Gleichung (5.2) und erhalten damit

$$0 = M[\mathcal{D}'_{b'c'}(g^{-1})\mathcal{D}_{cb}(g)] .$$

Damit ist dann auch der erste Fall von Gleichung (5.1) nachgeprüft. □