6. Was wir auch hätten lernen sollen

6.1 Allgemeine Klassifizierung der Lie-Algebren

Wir haben einige bedeutende Lie-Gruppen bzw. Lie-Algebren genauer studiert, insbesondere $SU(n)$ und $SO(n)$. Es ist aber möglich, alle Strukturen, die von unserer "Hauptformel" [S. 21: $2\alpha \cdot w / |\alpha|^2 = q - p$] erlaubt sind, zu klassifizieren! Dies wurde von Cartan getan, und ist nach ihm genannt.

	Lie-Algebren:	Lie-Gruppen:	
unendliche Familien von "regulären" Gruppen	A_n	$SU(n+1)$	
	B_n	$SO(2n+1)$	
	C_n	$Sp(2n)$	← symplektische Gruppen
	D_n	$SO(2n)$	
fünf "außergewöhnliche" bzw. "exzeptionelle" Gruppen	G_2		
	F_4		
	E_6		
	E_7		
	E_8.		
	↑ Rang		

Literatur:

* H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics, Kap. XIX, XX
* M. Gourdin, Basics of Lie Groups, Kap. 5.
* B.G. Wybourne, Classical groups for physicists, Kap. 6.

6.2 Graphische Methoden

Für fast alles was wir gelernt haben, gibt es schöne graphische Methoden. Zum Beispiel:

(a) <u>Dynkin-Diagramme</u> für die Klassifizierung der Lie-Algebren:

A_3 

B_3 

G_2 

E_6 

usw.

Die verschiedenen Arten von Linien entsprechen verschiedenen Winkeln zwischen einfachen Wurzeln in einem Gewichtsdiagramm!

Literatur:
* H. Georgi, Kap. VIII, XIX, XX
* B.G Wybourne, Kap. 7.

(b) <u>Young-Tableaux</u> für die Ausreduktion von Darstellungen der SU(n):

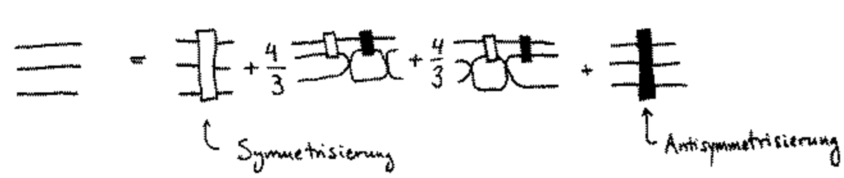
$$\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$$

Literatur: * H. Georgi, Kap. XII.

(c) <u>Birdtracks</u> für alles Mögliche! [Aber nur für Spaß.]

Aufgabe 8.3:

$$\delta^i_m \delta^j_n \delta^k_o = [P_A]^{ijk}_{mno} + [P_B]^{ijk}_{mno} + [P_C]^{ijk}_{mno} + [P_D]^{ijk}_{mno}$$

$\Leftrightarrow$ 

Literatur: P. Cvitanović, Group Theory [www.cns.gatech.edu/GroupTheory/]

6.3 Darstellungen der Poincaré-Gruppe

In Kapitel 4 haben wir die Darstellungen der Lorentzalgebra besprochen. Die Lorentzgruppe besteht aus Drehungen und Boosts, und ihre Darstellungen werden verwendet, um lokale Größen, wie die Lagrange-Dichte, zu konstruieren.

Fügt man die (nichtlokalen) Translationen hinzu, bekommt man die Poincaré-Gruppe. Die möglichen Darstellungen der Poincaré-Gruppe bestimmen, was für (propagierende) Teilchenzustände es geben kann $\Rightarrow$ massive Teilchen, masselose Teilchen, Polarisationszustände, ... (Wignersche Klassifikation).

Literatur:
* M. Gourdin, Kap. 12
* W.K. Tung, Group theory in physics, Kap. 10.

6.4 Supersymmetrie

Wir haben nur Fällen betrachtet, wo die Gruppenelemente g von den Generatoren der Lie-Algebra T^a (hermitesch oder nicht) durch $g = \exp(i \sum_{a=1}^{\dim} \theta^a T^a)$ erreicht werden können, wobei die θ^a reelle Koordinaten sind.

Es gibt aber eine Verallgemeinerung, wo z.B. die Koordinaten grassmannsche Variablen sein können [d.h. $\theta^a \theta^b = -\theta^b \theta^a$]. Dies führt letztendlich zum Begriff der Supersymmetrie.

Literatur:
* D. Bailin and A. Love, Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory, Kap. 1.5.

6.5 Symmetriebrechung und deren Konsequenzen

In der Physik kommt es häufig vor, daß obwohl die Theorie [d.h. die Lagrange-Dichte] eine Symmetrie hat, ist sie im Grundzustand "spontan gebrochen" (z.B. Ferromagnetismus).

Die Symmetrie spielt dennoch eine sehr wichtige Rolle! Sie kann z.B. die Existenz masseloser Teilchen, "Goldstone-Bosonen", verlangen. Oder sie führt zu topologischen Defekten:

G = ursprüngliche Symmetrie

H = kleine Gruppe des Grundzustandes

G/H = Faktorgruppe = überbleibende Symmetrie

$\pi_n(G/H)$ = "Homotopiegruppe", die die topologischen Eigenschaften der Abbildungen von $[0,1]^n$ auf G/H beschreibt.

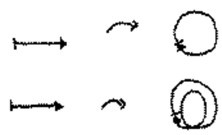
Zum Beispiel:

$G = SO(2)$ (Drehungen)

$H = \mathbb{1}$

$G/H = SO(2) = S^1$ als Mannigfaltigkeit

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$



$\cong +1$

$\cong +2$ usw.

Dies hängt mit Vortizes zusammen.

Literatur:

* M Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Kap. 4
* B.G Wybourne, Kap 16.

——— ∘ ———