5.2 Ausreduktion mit Charakteren

Wir haben gelernt, daß es Fälle gibt, in denen eine Analyse der Lie-Algebra keine eindeutige Aussage über die möglichen Darstellungen der Gruppe liefert. Um so mehr gilt dies natürlich für diskrete Gruppen, wo der Begriff der Lie-Algebra überhaupt nicht definiert ist. Wir brauchen also eine andere Methode für die Bestimmung der Darstellungen für diese Fälle.

Mittelbildung

Sei f eine Funktion auf der Gruppe G, $f: G \to \mathbb{C}$.
Eine Mittelbildung $M[f]$ wird mit folgenden Eigenschaften definiert:

* linear: $M[\lambda_1 f_1(g) + \lambda_2 f_2(g)] = \lambda_1 M[f_1(g)] + \lambda_2 M[f_2(g)]$.
* positiv definit: $f(g) > 0 \Rightarrow M[f(g)] > 0$.
* invariant: $M[f(g)] = M[f(g \cdot g')] = M[f(g' \cdot g)] \quad \forall g' \in G$.
* normiert: $f(g) = 1 \Rightarrow M[f(g)] = 1$.

Für endliche diskrete Gruppen:

$$M[f(g)] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$$

Für kontinuierliche Gruppen:

Die Eigenschaften entsprechen dem Integralbegriff. Invarianz verlangt $dg = d\, g \cdot g' = dg' \cdot g$; ein solches Maß wird als Haar-Maß bezeichnet. Normierte Gruppen, d.h. $M[1] = 1 < \infty$, werden kompakte Gruppen genannt.

Beispiel: $G = U(1) = \{ e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi) \}$; $dg = \frac{d\varphi}{2\pi}$.

NB: Im Wesentlichen derselbe Begriff wurde schon auf Seite 15 verwendet, um unitäre Darstellungen zu konstruieren.

Ein <u>Charakter</u> $\chi_D(g)$ einer Darstellung : $\chi_D(g) \equiv Sp[D(g)]$.

Notabene: (i) $\chi_D(g)$ bleibt invariant in $D(g) \to S D(g) S^{-1}$, d.h. in Similaritätstransformationen / Basiswechseln. [vgl. S. 15]

(ii) Für unitäre Darstellungen:

$$D(g^{-1}) = [D(g)]^\dagger \quad ; \quad \chi_D(g^{-1}) = [\chi_D(g)]^* \equiv \chi_D^*(g).$$

(iii) Für die direkte Summe von Darstellungen:

$$\chi_{D_1 \oplus D_2 \oplus \dots}(g) = \chi_{D_1}(g) + \chi_{D_2}(g) + \dots$$

<u>Fundamentale Orthogonalitätsrelation für Charaktere</u> :

irreduzible Darstellungen

$$M[\chi_{D'}^*(g)\, \chi_D(g)] \equiv \langle\langle \chi_{D'}(g) \,|\, \chi_D(g) \rangle\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } D' \not\sim D \\ 1 & \text{für } D' \sim D \end{cases} \qquad (A)$$

S. 15

äquivalent

<u>Folgerungen aus der Orthogonalitätsrelation</u> :

(i) Seien D eine allgemeine Darstellung, $\{D^{(i)}\}$ die verschiedenen irreduziblen Darstellungen, und n_i wie oft $D^{(i)}$ in D auftritt. Aus $\chi_D = \sum_i n_i \chi_{D^{(i)}}$ folgt

$$n_i = \langle\langle \chi_{D^{(i)}} \,|\, \chi_D \rangle\rangle .$$

Damit ist das Problem der Ausreduktion gelöst worden!

(ii)
$$\langle\langle \chi_D \,|\, \chi_D \rangle\rangle = \sum_i n_i \langle\langle \chi_{D^{(i)}} \,|\, \chi_D \rangle\rangle = \sum_i n_i^2 .$$

(iii) $\langle\langle \chi_D \,|\, \chi_D \rangle\rangle = 1 \iff$ D irreduzibel.

Also sehr starke Ergebnisse!

Leider ist $\langle\langle \chi_{D^{(i)}} \,|\, \chi_D \rangle\rangle$ in der Praxis oft sehr schwierig zu berechnen.

Auf jeden Fall gilt es jetzt, die Orthogonalitätsrelation zu beweisen.

Beweis der fundamentalen Orthogonalitätsrelation (Δ)

(a) Seien D', D zwei irreduzible Darstellungen der Dimensionen d', d. Falls es uns gelingt, die Beziehungen

$$M\left[D'_{b'a'}(g^{-1})\, D_{ab}(g) \right] = \begin{cases} 0, & D' \nsim D \\ \frac{1}{d}\,\delta_{aa'}\,\delta_{bb'}, & D' = D \end{cases} \qquad (\square)$$

zu beweisen, folgt (Δ) durch $\sum_{a,b=1}^{d} \sum_{a',b'=1}^{d'} \delta_{ab}\,\delta_{a'b'}\ (\square)$.

(b) Sei $S : V \to V'$ eine lineare Abbildung zwischen den Darstellungsräumen von D und D'. S ist damit eine $d' \times d$ – Matrix. Betrachten wir

$$H_{b'b} \equiv M\left[D'_{b'a'}(g^{-1})\, S_{a'a}\, D_{ab}(g) \right] . \qquad (\nabla)$$

Es folgt, für ein beliebiges $g' \in G$:

$$\begin{aligned} D'(g')\,H &\underset{\text{M linear}}{=} M\left[D'(g')\, D'(g^{-1})\, S\, D(g) \right] \\ &= M\left[D'(g'g^{-1})\, S\, D(g) \right] \\ &= M\left[D'((gg'^{-1})^{-1})\, S\, D(gg'^{-1}g') \right] \\ &\underset{\text{M invariant}}{=} M\left[D'(g^{-1})\, S\, D(gg') \right] \\ &= M\left[D'(g^{-1})\, S\, D(g)\, D(g') \right] \overset{\text{M linear}}{=} H \cdot D(g') . \end{aligned}$$

Nun: (i) $D' = D$

$$\underset{\substack{\text{Lemma von Schur} \\ \text{(Aufgabe 12.1)}}}{\Rightarrow} \quad H = \lambda \cdot \mathbb{1}_{d \times d}$$

Nehmen wir Spur auf beiden Seiten von (∇)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda \cdot d &= M\left[Sp\{ D(g^{-1})\, S\, D(g) \} \right] \\ &= M\left[Sp\{ D(g)\, D(g^{-1})\, S \} \right] = Sp[S] . \qquad (*) \end{aligned}$$

Sei jetzt $S_{a'a} \equiv \delta_{a'c'} \cdot \delta_{ac} \Rightarrow Sp[S] = \delta_{cc'}$

$$(*) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{d}\,\delta_{cc'}$$

$$(\nabla) \Rightarrow \frac{1}{d}\,\delta_{cc'}\,\delta_{b'b} = M\left[D_{b'c'}(g^{-1})\, D_{cb}(g) \right]$$

$\Rightarrow$ zweite Teil von $(\square)$ ist OK.

Letztendlich : (ii) $D' \not\sim D$.

Lemma' von Schur : Gelten $D' \not\sim D$ und $D'(g)\,H = H\,D(g)$ für alle g, ist $H = 0$.

* $\det H \neq 0 \Rightarrow \exists\, H^{-1} \Rightarrow D'(g) = H\,D(g)\,H^{-1} \Rightarrow D' \sim D$ ↯ Annahme.
* also entweder ist H $d \times d$-Matrix mit $\det H = 0$ [falls $d' = d$], oder ist H $d' \times d$-Matrix mit $d' \neq d$.
* Sei $Hv = 0$.
  Dann ist $H\,D(g)\,v = D'(g)\,Hv = 0$
  $\Rightarrow$ die $\{D(g)v\}$ spannen einen invarianten Unterraum auf.
  D ist irreduzibel
  $\Rightarrow$ entweder $\{D(g)v\} = 0 \Rightarrow \{H(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0\}$
  $\Rightarrow$ H injektiv
  oder $\{D(g)v\} = V \Rightarrow Hv = 0 \;\; \forall\, v \in V \Rightarrow H = 0$.
* Sei $Hv = v' \neq 0$.
  Dann ist $D'(g)\,v' = D'(g)\,Hv = H\,D(g)\,v$
  $\Rightarrow$ alle $\{D'(g)v'\}$ sind der Form $H \cdot x$, $x \in V$.
  D.h., $\{D'(g)v'\}$ spannen einen invarianten Unterraum auf.

  D' ist irreduzibel
  $\Rightarrow$ entweder $\{D'(g)v'\} = V' \Rightarrow \forall\, v' \in V'$ ist der Form Hx
  $\Rightarrow$ H surjektiv
  oder $\{D'(g)v'\} = 0$ ↯ die Annahme $v' \neq 0$.

$\Rightarrow$ entweder H injektiv & surjektiv $\Rightarrow \exists\, H^{-1}$ ↯ Annahme
oder $H = 0$. □

Jetzt wählen wir wieder $S_{a'a} = \delta_{a'c'} \cdot \delta_{ac}$ in (∇), und kriegen dann

$$0 = M\left[D'_{b'c'}(g^{-1})\, D_{cb}(g) \right].$$

Damit ist auch der erste Teil von $(\ast)$ geprüft worden.

———— o ———— o ————