5. Globale Gruppeneigenschaften

5.1 Zentrum, Faktorgruppe, usw.

Sei M eine Menge und $\mathrm{Perm}(M)$ die Menge von invertierbaren Abbildungen von M auf sich selbst [d.h. "Permutationen"].

(Es geht also um eine Verallgemeinerung von was wir in der (linearen) Darstellungstheorie hatten: damals war M ein Vektorraum V und $\mathrm{Perm}(M)$ die Gruppe von linearen Operatoren auf V, $GL(V)$. [S.13])

Wir sagen, daß die Gruppe G auf M (von links) wirkt, falls es einen Homomorphismus $L: G \to \mathrm{Perm}(M)$, $g \mapsto L_g \in \mathrm{Perm}(M)$ gibt. Das heißt,

$$(L_{g_2} \cdot L_{g_1})(x) \equiv L_{g_2}(L_{g_1}(x)) \underset{\text{Homomorphismus}}{=} L_{g_2 \cdot g_1}(x) .$$

Notation:

$$L_g(x) \equiv gx .$$

Wirkung von rechts:

$$R_{g_2}(R_{g_1}(x)) = R_{g_1 \cdot g_2}(x) .$$

Notation:

$$R_g(x) \equiv xg .$$

Die Bahn bzw. Orbit von x:

$$O_x \equiv \{ L_g(x) \mid g \in G \} .$$

Die kleine Gruppe von x:

$$G_x \equiv \{ g \in G \mid L_g(x) = x \} .$$

Jede kleine Gruppe ist eine Untergruppe von G.

[(i) $h_1, h_2 \in G_x \Rightarrow L_{h_1 \cdot h_2}(x) = L_{h_1}(L_{h_2}(x)) = L_{h_1}(x) = x$

$\Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in G_x$

(ii) $h \in G_x \Rightarrow x \overset{*}{=} L_e(x) = L_{h^{-1} \cdot h}(x) = L_{h^{-1}}(L_h(x)) = L_{h^{-1}}(x)$

$\Rightarrow h^{-1} \in G_x$.]

* $L_g(x) = L_{e \cdot g}(x) = L_e(L_g(x)) \Rightarrow L_e$ ist Identitätsabbildung

Es geht um eine <u>Äquivalenzrelation</u> "$\sim$" in einer Menge falls

1. $a \sim a$ (reflexiv)
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (symmetrisch)
3. $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (transitiv).

Eine <u>Äquivalenzklasse</u> ist die Menge aller Elemente, die äquivalent miteinander sind.

Die Bahnen O_x stellen eine Partition der M in disjunkte Äquivalenzklassen dar!

$$\left[\begin{array}{ll} 1. & L_e \text{ ist Identitätsabbildung} \Rightarrow x \in O_x \\ 2. & y \in O_x \Rightarrow y = L_g(x) \Rightarrow x = L_{g^{-1}}(y) \Rightarrow x \in O_y \\ 3. & y \in O_x \text{ und } z \in O_y \Rightarrow z = L_g(y) = L_g(L_{g'}(x)) = L_{gg'}(x) \\ & \qquad \Rightarrow z \in O_x \end{array}\right]$$

Die Gruppe kann auch auf sich selbst wirken:

$$L_g(g') \equiv g \cdot g'$$

In diesem Fall ist

$$O_{g'} = G,$$

weil ein beliebiges Element g'' durch $g = g'' \cdot g'^{-1}$ erreicht werden kann. Eine solche Wirkung nennt man "<u>transitiv</u>".

Eine andere Wirkung von G auf sich selbst: "<u>Konjugation</u>",

$$L_g(g') \equiv g \cdot g' \cdot g^{-1}$$

Diese Bahnen nennt man <u>Konjugationsklassen</u>, und die Wirkung ist im Allgemeinen nicht transitiv.

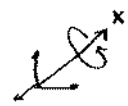
Sei H eine Untergruppe. Betrachten wir $R_h(g) \equiv g \cdot h$, $g \in G$, $h \in H$. Die Bahnen

$$gH = \{ gh \mid h \in H, \; g \text{ gegeben} \}$$

Sind die <u>Linksnebenklassen</u> von H in G. Die Menge von Linksnebenklassen bezeichnet man mit G/H [G modulo H].

(Jede gH hat dieselbe Anzahl von Elementen, und zwar $|H|$, falls H endlich: $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow$ jede $h_1 \neq h_2$ führt zu einem neuen Element.)

Beispiel: Sei H die kleine Gruppe von x, d.h., die Elemente die dem x nichts tun:



$H =$ "Drehungen um die x-Richtung"

Dann ist die Menge G/H äquivalent zu den verschiedenen Richtungen von x, d.h., zu der Menge M selbst.

<u>Frage</u>: Können wir der Menge G/H eine Gruppenstruktur geben? [d.h. eine Gruppenmultiplikation definieren?]

<u>Versuch</u>:

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) \stackrel{?}{=} g_1 g_2 H$$

<u>Problem</u>:

$$g_1 H = g_1 h H$$

$$\Rightarrow g_1 \cdot h \cdot g_2 H \stackrel{?}{=} g_1 g_2 H$$

$$\Rightarrow g_1 \cdot h \cdot g_2 \stackrel{?}{=} g_1 \cdot g_2 \cdot h'$$

Dies ist nicht unbedingt der Fall!

Sei aber H ein <u>Normalteiler</u>:

$$\forall g : \quad gHg^{-1} = \{ ghg^{-1} \mid h \in H \} = H \quad !$$

D.h. $\forall g \in G, \forall h \in H \quad \exists \; h' \in H$ so daß

$$ghg^{-1} = h'$$

$$\Leftrightarrow \quad gh = h'g$$

Dann ist $h \cdot g_2 = g_2 \cdot h'$, und G/H ist eine Gruppe, genannt <u>Faktorgruppe</u>.

<u>Beispiele</u> : (i) das <u>Zentrum Z</u> $\equiv \{ z \in G \mid zg = gz \quad \forall g \in G \}$

= Gruppenelemente die mit allen anderen vertauschen.

Z ist offensichtlich ein Normalteiler.

(ii) Sei φ ein Homomorphismus, und

$$\underline{\mathrm{Kern}\,\varphi} \equiv \{ h \in G \mid \varphi(h) = e \}$$ [vgl. S.15].

Dann gilt:

$$\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g g^{-1}) = e$$

$\Rightarrow$ Kern φ ist ein Normalteiler.

Betrachten wir letztendlich einen Homomorphismus $\varphi : G \to G'$.

Das <u>Bild</u> von φ $\equiv \{ \varphi(g) \mid g \in G \}$.

<u>Homomorphiesatz</u> :

$$\underbrace{G / \mathrm{Kern}(\varphi)}_{\text{Faktorgruppe}} \underset{\text{Isomorphismus}}{\cong} \mathrm{Bild}(\varphi)$$

$\Rightarrow$ ein Homomorphismus induziert einen Isomorphismus!

<u>Beweis:</u>

Sei $\Phi : G / \mathrm{Kern}(\varphi) \to \mathrm{Bild}(\varphi)$ mit $\Phi(g\,\mathrm{Kern}(\varphi)) \equiv \varphi(g)$.

* Φ ist ein Homomorphismus:

$$\Phi(g_1 H g_2 H) = \Phi(g_1 g_2 H) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = \Phi(g_1 H) \cdot \Phi(g_2 H)$$

* Φ ist surjektiv durch Definition.

* Φ ist injektiv:

$$\Phi(g_1 H) = \Phi(g_2 H) \Leftrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$$

$$\Rightarrow e = \varphi(g_1^{-1}) \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1^{-1} \cdot g_2)$$

$$\Rightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 = h \in \mathrm{Kern}\,\varphi \Rightarrow g_2 = g_1 h \Rightarrow g_2 H = g_1 H . \quad \square$$

<u>Die Schlußfolgerung</u> : Sind zwei Gruppen homomorph, haben sie dieselben Lie-Algebren, Gewichtsdiagramme, usw. Sie sind aber nicht unbedingt isomorph. In der Tat muß man auch einige globale Eigenschaften der Gruppe, wie das Zentrum, betrachten, um sicher zu sein, daß wir durch die Lie-Algebrenanalyse die Darstellungen einer gegebenen Gruppe richtig verstanden haben!

[vgl. Übungen]