4.2. Irreduzible Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$

Weil $L^\uparrow_+$ und $SL(2,\mathbb{C})$ homomorph sind, haben die entsprechenden Lie-Algebren dieselben Strukturen. Das heißt, die Vertauschungsrelationen, die Cartan Unteralgebra, und die Gewichtsdiagramme der irreduziblen Darstellungen sind identisch. Finden wir diese jetzt für $SL(2,\mathbb{C})$.

$SL(2,\mathbb{C})$ ist nicht kompakt $\Rightarrow$ Darstellungen nicht unbedingt unitär (vgl. S. 15)
$\Rightarrow$ Generatoren nicht automatisch hermitesch.

Die Cartan Unteralgebra spielt dennoch eine ähnliche Rolle.

Was sind die Generatoren? Wir schreiben $M \equiv \exp(i\Theta^a T^a)$.

$$\det M = 1 = \exp\left(i\Theta^a \, Sp[T^a]\right) \Rightarrow Sp[T^a] = 0 .$$

Eine allgemeine komplexe spurlose 2×2-Matrix $i\Theta^a T^a$ ist der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,a + i\,\mathrm{Im}\,a & \mathrm{Re}\,b + i\,\mathrm{Im}\,b \\ \mathrm{Re}\,c + i\,\mathrm{Im}\,c & -\mathrm{Re}\,a - i\,\mathrm{Im}\,a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,a + i\,\mathrm{Im}\,a & \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,b+\mathrm{Re}\,c) + \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,b - \mathrm{Re}\,c) + \frac{i}{2}(\mathrm{Im}\,b + \mathrm{Im}\,c) + \frac{i}{2}(\mathrm{Im}\,b - \mathrm{Im}\,c) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,c+\mathrm{Re}\,b) + \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,c - \mathrm{Re}\,b) + \frac{i}{2}(\mathrm{Im}\,c + \mathrm{Im}\,b) + \frac{i}{2}(\mathrm{Im}\,c - \mathrm{Im}\,b) & -\mathrm{Re}\,a - i\,\mathrm{Im}\,a \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Re}\,a\cdot\sigma_3 + \mathrm{Im}\,a\cdot i\sigma_3 + \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,b+\mathrm{Re}\,c)\cdot\sigma_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,b+\mathrm{Im}\,c)\cdot i\sigma_1$$
$$+ \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,c - \mathrm{Im}\,b)\cdot\sigma_2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,b - \mathrm{Re}\,c)\, i\sigma_2 .$$

6 reelle Parameter!

Wir definieren jetzt:

$$Z_{23} \equiv -\frac{i}{2}\sigma_1 \qquad Z_{10} \equiv -\frac{1}{2}\sigma_1$$
$$Z_{31} \equiv -\frac{i}{2}\sigma_2 \qquad Z_{20} \equiv -\frac{1}{2}\sigma_2$$
$$Z_{12} \equiv -\frac{i}{2}\sigma_3 \qquad Z_{30} \equiv -\frac{1}{2}\sigma_3$$
$$Z_{\nu\mu} \equiv -Z_{\mu\nu}$$
$$\Theta^{23} \equiv -(\mathrm{Im}\,b+\mathrm{Im}\,c) \qquad \Theta^{10} \equiv -(\mathrm{Re}\,b+\mathrm{Re}\,c)$$
$$\Theta^{31} \equiv (\mathrm{Re}\,c - \mathrm{Re}\,b) \qquad \Theta^{20} \equiv (\mathrm{Im}\,b - \mathrm{Im}\,c)$$
$$\Theta^{12} \equiv -2\,\mathrm{Im}\,a \qquad \Theta^{30} \equiv -2\,\mathrm{Re}\,a$$
$$\Theta^{\nu\mu} \equiv -\Theta^{\mu\nu}$$

Dann kann M als $M \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu} Z_{\mu\nu}\right)$ geschrieben werden.

Ausgehend von $[z_i, z_j] = 2i\epsilon_{ijk} z_k$ können die Vertauschungsrelationen der $Z_{\mu\nu}$ bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
[Z_{23}, Z_{23}] &= 0 \\
[Z_{23}, Z_{10}] &= 0 \\
[Z_{23}, Z_{31}] &= Z_{12} \\
[Z_{23}, Z_{20}] &= Z_{30} \\
[Z_{23}, Z_{12}] &= -Z_{31} \\
[Z_{23}, Z_{30}] &= -Z_{20} \qquad \text{usw}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst:

$$
[Z_{\mu\nu}, Z_{\rho\lambda}] = \eta_{\nu\rho} Z_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho} Z_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} Z_{\mu\rho} + \eta_{\mu\lambda} Z_{\nu\rho} \qquad \text{(vgl. Übungen)}
$$

Diese Vertauschungsrelation definiert die Lorentz- bzw. $SL(2,\mathbb{C})$-Algebra.

Eine andere Schreibweise:

$$
M = \exp\left[i \, \frac{\Theta^{\mu\nu}}{2} \left(-iZ_{\mu\nu}\right)\right] \quad ;
$$

$$
\left[(-iZ_{\mu\nu}), (-iZ_{\rho\lambda})\right] = i \underbrace{\left(\eta_{\mu\rho}\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\lambda + \eta_{\nu\lambda}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\rho - \eta_{\nu\rho}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\rho\right)}_{\text{die Strukturkonstanten}} (-iZ_{\alpha\beta})
$$

— o —

Cartan Unteralgebra und Darstellungen

- Die Menge der Generatoren besteht offensichtlich aus zwei "Kopien" von Generatoren der $SU(2)$.

- Das heißt, $SL(2,\mathbb{C}) \sim SU(2) \otimes SU(2)$.

- Die Darstellungen werden daher als $D(J_1, J_2)$ bezeichnet, mit $J_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$; $J_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

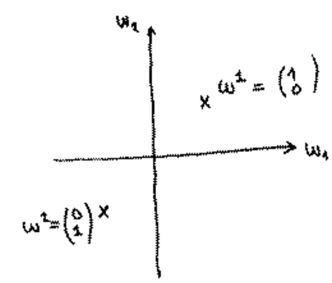
- $\dim D(J_1, J_2) = (2J_1 + 1)\cdot(2J_2+1)$.

- Die Matrizen H_i der Cartan Unteralgebra werden immer als hermitesch definiert [was eine "komplexe Erweiterung" der Lie-Algebra verlangt, d.h., wir erlauben Linearkombinationen mit komplexen Koeffizienten].
  Die Normierung bleibt $Sp[H_i^2] = \frac{1}{2}$.

- Eine Möglichkeit $\equiv D(\frac{1}{2}, 0)$:

$$H_1 = i Z_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

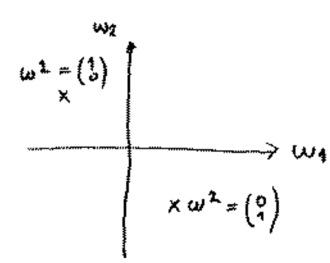
$$H_2 = -Z_{30} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



- Konjugierte Darstellung $\equiv D(0, \frac{1}{2})$:
  $Z_{12} \to -Z_{12}$!

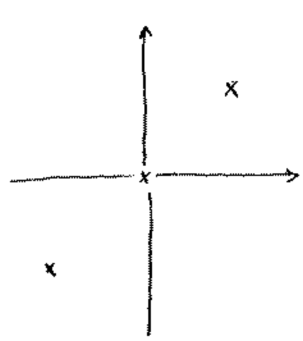
$$H_1 = i(-Z_{12}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$H_2 = -Z_{30} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

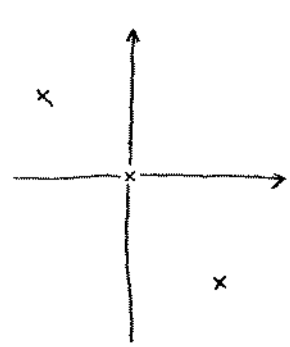


- Einige andere Darstellungen:

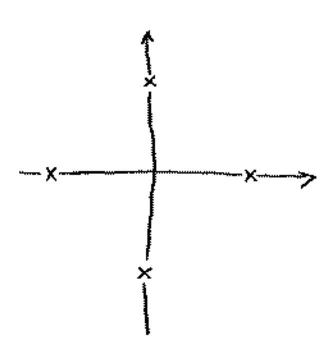
$D(1,0)$



$D(0,1)$



$D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



usw.

Was ist die entsprechende Physik?

Es wird vermutet, daß Lorentzinvarianz eine eksakte Symmetrie der Natur ist. Das heißt, die Felder unserer Theorie sollten als irreduzible Darstellungen transformiert werden, und ihre Kombination, die Lagrange-Dichte, sollte invariant sein.

Beispiele:

- $D(0,0)$ = eindimensionale Darstellung = Skalarfeld.
- $D(\frac{1}{2},0)$, $D(0,\frac{1}{2})$ = zwei Arten von zweidimensionalen Darstellungen
  = zwei Arten von Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen
  $\equiv$ links- und rechtshändige Fermionen!

  Wie bilden wir eine invariante Größe davon?

  $$M \in SL(2,\mathbb{C}) \quad ; \quad \psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta$$

  Betrachte

  $$\varepsilon^{\alpha\beta}\psi'_\alpha\psi'_\beta = \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta}M_\alpha{}^\gamma M_\beta{}^\delta}\psi_\gamma\psi_\delta = \varepsilon^{\gamma\delta}\psi_\gamma\psi_\delta = \text{invariant}.$$

  $$\text{S.30}: \ \det M \cdot \varepsilon^{\gamma\delta} = \varepsilon^{\gamma\delta} \ !$$

  Aber ist nicht $\varepsilon^{\gamma\delta}\psi_\gamma\psi_\delta = \psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1 = 0$??

  Nein! Fermionen werden mit Grassmann-Variablen beschrieben!

- $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ = vierdimensionale Darstellung
  = Lorentzvektorfeld A_μ.

  Invariante Größe: $A^\mu A_\mu$.

  Warum ist dies $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$? S.40: $M\,\sigma_\nu M^+ = \sigma_\rho \Lambda^\rho{}_\nu$

  $$\Rightarrow \quad B'_\nu \equiv (\psi')^+\sigma_\nu\chi' = B_\rho\Lambda^\rho{}_\nu, \quad \text{falls } \chi' = M^+\chi, \ (\psi')^+ = \psi^+ M$$

  Zwei Spinoren ...

  ... machen tatsächlich ein Vektorfeld!

— o —