4. Lorentzinvarianz

4.1. Lorentzgruppe und $SL(2,\mathbb{C})$

Die Lorentzgruppe $L \equiv O(3,1)$ wurde auf Seiten 6-7 eingeführt, als die Invarianzgruppe $L = \{ \Lambda \in GL(4,\mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,,\ \eta = \mathrm{Diag}(-1,1,1,1) \}$.
Das heißt, das Skalarprodukt

$$(x,y) \equiv x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} \equiv -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^{3} x^i y^i \equiv -x^0 y^0 + \vec{x}\cdot\vec{y}$$

bleibt invariant in $x \to x' = \Lambda x \,,\ y \to y' = \Lambda y$:

$$(x',y') = (x,y) \iff \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} .$$

In der Teilchenphysik nimmt man meistens $-\eta$ als die Metrik, statt η, und das werden wir auch tun: also im Folgenden $\eta \equiv \mathrm{Diag}(1,-1,-1,-1)$; die Eigenschaften der Gruppe bleiben natürlich unverändert.

$\dim L = \dim O(4) = 6$.

Spezialfälle:

(a) Drehungen.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} , \quad R \in SO(3) .$$

Drehungen hängen von drei Parametern ab:
$\hat{u}$ = Einheitsvektor = Drehachse (zwei Parameter)
θ = Drehwinkel (ein Parameter)

$$\Rightarrow \quad R = R(\hat{u},\theta) \qquad \text{[vgl. Übungen]}$$

(b) Spezielle Lorentztransformationen ("Boosts")

Diese hängen wieder von drei Parametern ab:
$\hat{n}$ = Einheitsvektor = Boostrichtung (zwei Parameter)
$\beta = \frac{v}{c}$ = relative Geschwindigkeit in natürlichen Einheiten

$$\Rightarrow \quad B = B(\hat{n},\eta) ,$$

wobei $\eta \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$ die "Rapidität" heißt. [vgl. Übungen]

(c) Diskrete Lorentztransformationen:

* Raumspiegelung $I_P \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$; $x^0 \to x^0$, $\vec{x} \to -\vec{x}$.

* Zeitumkehr $I_T \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$; $x^0 \to -x^0$, $\vec{x} \to \vec{x}$.

* Raumzeitspiegelung $I_{PT} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$; $x^0 \to -x^0$, $\vec{x} \to -\vec{x}$.

Topologie der Lorentzgruppe

* $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \qquad | \det$

  $(\det \Lambda)^2 = 1$

  $\Rightarrow \det \Lambda = \begin{cases} +1 : & L_+ \equiv \text{die eigentlichen Lorentztransformationen} \\ -1 : & L_- \end{cases}$

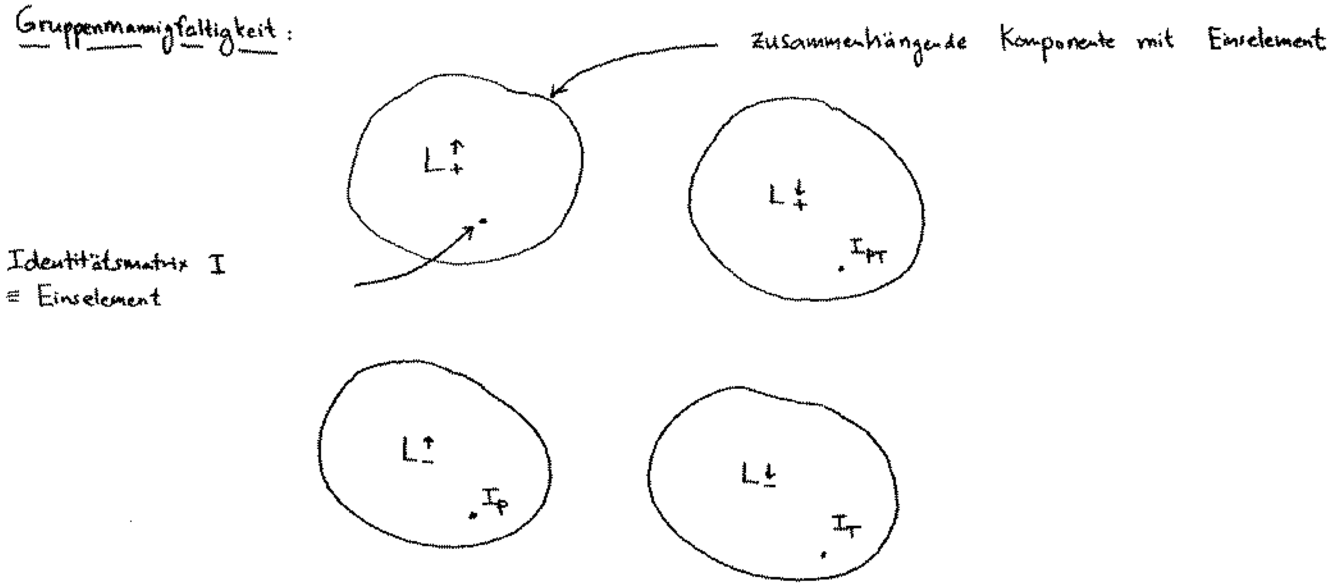
* $[\Lambda^T \eta \Lambda]_{00} = 1$

  $\Leftrightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$

  $\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \quad : \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 : L^\uparrow \equiv$ die orthochronen Lorentztransformationen

  $\Lambda^0{}_0 \leq -1 : L^\downarrow$

Gruppenmannigfaltigkeit:



Homomorphismus von $L_+^\uparrow$ und $SL(2,\mathbb{C})$

($SL(2,\mathbb{C}) = \{$ komplexe 2×2-Matrizen mit $\det A = 1 \}$)

Um die irreduziblen Darstellungen der $L_+^\uparrow$ zu finden, zeigen wir zuerst, daß $L_+^\uparrow$ homomorph zu $SL(2,\mathbb{C})$ ist. Dann klassifizieren wir die irr. D. von $SL(2,\mathbb{C})$. Die Vorgehensweise ist uns schon aus Aufgabe 2.4 bekannt, wo die Beziehung von SO(3) und SU(2) untersucht wurde. (Was wir jetzt tun ist eine Verallgemeinerung davon.)

(a) Seien $\quad \sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$H_2 \equiv \{ A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A^+ = A \}$$

Jede $A \in H_2$ kann als $\quad A = x^0\sigma_0 + \sum_i x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$

geschrieben werden, wo $x^\mu \in \mathbb{R}$. Schreibweise: $A = x^\mu \sigma_\mu$.
Wir bemerken, daß gilt:

$$\det A = (x^0)^2 - \sum_i (x^i)^2 = x^\mu x_\mu \quad .$$

(b) Diese Abbildung von $\mathbb{R}^4$ auf H_2, $x^\mu \mapsto A$, ist bijektiv:

* x^μ gegeben $\Rightarrow$ A durch Konstruktion.
* A gegeben $\Rightarrow$ wir definieren $\bar\sigma_0 = \sigma_0 \,,\ \bar\sigma_i = -\sigma_i$

$$\Rightarrow \qquad \bar\sigma^0 = \sigma_0 \,,\ \bar\sigma^i = \sigma_i$$

$$\Rightarrow \qquad x^\mu = \frac{1}{2}\, Sp\left[\bar\sigma^\mu A\right].$$

(c) Sei $M \in SL(2,\mathbb{C})$. Wir betrachten die Transformation

$$A \to A' \equiv M A M^+ \quad .$$

$$(A')^+ = M A^+ M^+ = M A M^+ = A' \qquad \Rightarrow \quad A' \in H_2 .$$

$$\Rightarrow \quad x'^\mu = \frac{1}{2}\, Sp\left[\bar\sigma^\mu A'\right] \in \mathbb{R} .$$

Die Transformation ist linear: $(\alpha A + \beta B)' = M(\alpha A + \beta B)M^+ = \alpha A' + \beta B'$.
Wir schreiben also: $x'^\mu \equiv \left[\Lambda(M)\right]^\mu{}_\nu\, x^\nu$.

(d) Die induzierte Transformation $\Lambda(M)$ ist eine Lorentztransformation!

* $x'^\mu x'_\mu = \det\left[MAM^+\right] = |\det M|^2 \det A = x^\mu x_\mu$.
* Weil dies für alle x gilt, ist auch
$$x'^\mu y'_\mu = \tfrac{1}{2}\left(x'^\mu y'_\mu + y'^\mu x'_\mu\right) = \tfrac{1}{2}\left[(x'+y')^\mu (x'+y')_\mu - x'^\mu x'_\mu - y'^\mu y'_\mu\right] = x^\mu y_\mu \Rightarrow \square.$$

(e) $$x'^\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\bar{\sigma}^\mu M x^\nu \sigma_\nu M^+\right] = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^+\right] x^\nu$$

$$\Rightarrow \left[\Lambda(M)\right]^\mu{}_\nu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^+\right].$$

(f) $$\left[\Lambda(M)\right]^0{}_0 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[MM^+\right] = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(M_{1i}M^*_{1i} + M_{2i}M^*_{2i}\right) \geq 0 \Rightarrow \Lambda \in L^\uparrow.$$

(g) $SL(2,\mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend & $\det\Lambda(M)$ ist eine kontinuerliche Funktion von M & $\det\Lambda(M) = \pm 1$ & $\Lambda(\mathbb{1}) = \delta^\mu{}_\nu$ $\Rightarrow \det\Lambda = +1$

$\Rightarrow \Lambda \in L^\uparrow_+$.

(h) Die Abbildung $f: M \mapsto \Lambda(M)$ ist ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned}
\sigma_\mu\left\{\Lambda(MM')^\mu{}_\nu x^\nu\right\} &\equiv MM'\,(\sigma_\nu x^\nu)\,\left[MM'\right]^+ \\
&= M\underbrace{\left\{M'(\sigma_\nu x^\nu)M'^+\right\}}_{\sigma_\rho \Lambda(M')^\rho{}_\nu x^\nu}M^+ \\
&= \sigma_\mu \Lambda(M)^\mu{}_\rho\, \Lambda(M')^\rho{}_\nu\, x^\nu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda(MM')^\mu{}_\nu = \Lambda(M)^\mu{}_\rho\,\Lambda(M')^\rho{}_\nu \qquad \square.$$

Also hat die Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ dieselbe Struktur wie $L^\uparrow_+$ (ob es sogar um einen Isomorphismus geht, betrachten wir später), und es reicht, die irreduziblen Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ zu finden!