

### 3.6 Anwendungen

Wir haben in den vorigen Kapiteln gelernt, was für unitäre irreduzible Darstellungen eine gegebene (halbeinfache) Lie-Algebra hat. Fassen wir jetzt einige physikalische Anwendungen dieser Ergebnisse zusammen.

#### (i) Teilchenspektren

Wie schon am Anfang erwähnt, werden die möglichen Entartungen der Energie- bzw. Masseneigenzustände durch die Dimensionen irreduzibler Darstellungen der relevanten Invarianzgruppen bestimmt.

Beispiel: Aufgabe 7.1  $\Rightarrow$  Isospin- $SU(2)$ .

Aber wir können auch das s-Quark noch hinzufügen  $\Rightarrow SU(3)$ !  
 [  $SU(2)$  bleibt als eine Untergruppe, wo die Entartungen genauer sind ].

Die Gewichtsachsen haben je eine physikalische Interpretation:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv u, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv d, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv s$$

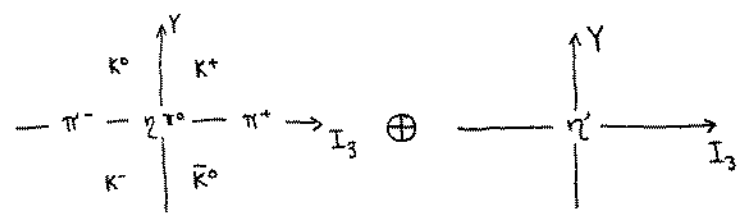
$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1 \equiv I_3 \equiv \text{3-Komponente des Isospins [vgl. Aufgabe 7.1]}$$

$$H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow w_2 = \text{Linearkombination von } I_3 \text{ und Ladung [vgl. Übungen],}$$

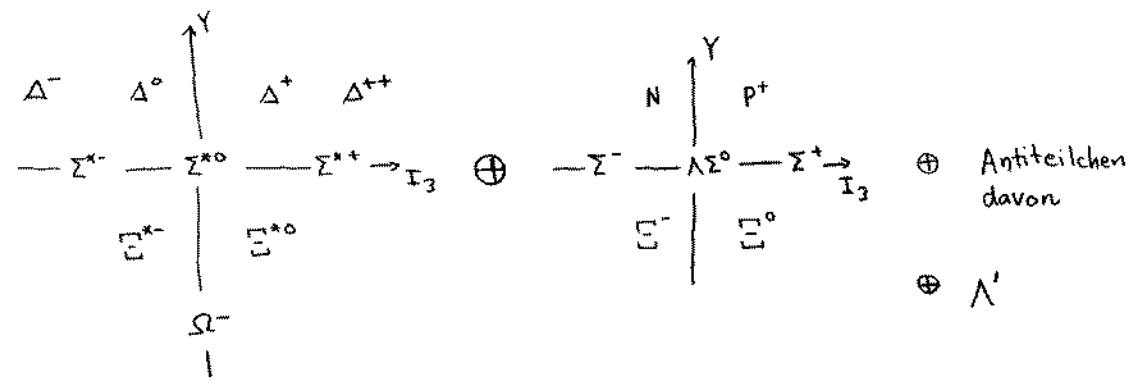
genannt  $\frac{\sqrt{3}Y}{2}$ , wobei  $Y \equiv$  Hyperladung.

Die leichtesten beobachteten Teilchen sind:

\* Mesonen = Quark-Antiquark-Zustände:  $3^* \otimes 3 = 8 \oplus 1$  [vgl. S. 26]



\* Baryonen = Drei-Quark-Zustände:  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$  [vgl. Aufgabe 8.3]



(ii) Elastische Streuung

Symmetrien spielen eine wichtige Rolle nicht nur für "stationäre" Eigenschaften des Systems, wie das Spektrum, sondern auch für dynamische Prozesse, wie Streuung.

Streuung verlangt Wechselwirkungen. Nehmen wir an, daß nur die starken Wechselwirkungen hier eine große Rolle spielen. Der Einfachheit halber betrachten wir auch Mesonen, die nur aus u- bzw. d-Quarks bestehen, so daß wir die Isospingruppe SU(2) statt SU(3) verwenden können.

Aufgabe 7.2:

$$\begin{aligned}
|\pi^+\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |20\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |100\rangle \\
|\pi^+\pi^-\rangle_s &= \frac{1}{\sqrt{6}} |20\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |100\rangle \\
s\text{-Welle} \quad \uparrow \\
|\pi^+\pi^0\rangle_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} |21\rangle
\end{aligned}$$

Amplitude:

$$\begin{aligned}
&\langle \pi^+\pi^0; t_f | \hat{U}_I(t_f, t_i) | \pi^+\pi^0; t_i \rangle_s \\
&\equiv \langle f | \underbrace{\hat{U}_I}_{\text{Zeitentwicklungsoperator}} | i \rangle
\end{aligned}$$

Nun:

$$\begin{aligned}
&SU(2) \text{ ist eine Symmetrie} \Rightarrow \\
&\exp(-i\theta^a T^a) \hat{U}_I \exp(+i\theta^a T^a) = \hat{U}_I \Rightarrow \\
&[T^a, \hat{U}_I] = 0 \Rightarrow [Z^a(T^a)^2, \hat{U}_I] = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt:

- \*  $I_3^{(f)} \langle f | \hat{U}_I | i \rangle = \langle f | T^3 \hat{U}_I | i \rangle = \langle f | \hat{U}_I T^3 | i \rangle = I_3^{(i)} \langle f | \hat{U}_I | i \rangle$   
 $\Rightarrow I_3^{(f)} = I_3^{(i)}$  !
- \*  $I^{(f)}(I^{(f)}+1) \langle f | \hat{U}_I | i \rangle = \langle f | \sum_a (T^a)^2 \hat{U}_I | i \rangle = \dots = I^{(i)}(I^{(i)}+1) \langle f | \hat{U}_I | i \rangle$   
 $\Rightarrow I^{(f)} = I^{(i)}$  !
- \* Weiterhin [vgl. Übungen]: für ein gegebenes I, ist die Amplitude unabhängig von  $I_3$  !

Das heißt, es gibt nur zwei unabhängige Amplitude,

$$A_2 \equiv \langle 20 | \hat{O}_I | 20 \rangle \text{ und } A_0 \equiv \langle 00 | \hat{O}_I | 00 \rangle,$$

und dann ist

$$A(\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = \frac{2}{3} A_2 + \frac{1}{3} A_0,$$

$$A(\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{1}{6} A_2 + \frac{1}{3} A_0,$$

$$A(\pi^+\pi^0 \rightarrow \pi^+\pi^0) = \frac{1}{2} A_2.$$

Der Wirkungsquerschnitt wird durch  $|A(\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2$  bestimmt.

(ii) Symmetriebrechende Zerfälle

Die SU(3)- bzw. Isospinvarianz wird durch die schwachen Wechselwirkungen verletzt. Und dennoch spielt sie auch in solchen Prozessen eine wichtige Rolle!

Dies kommt wegen des Wigner-Eckart-Theorems zustande. Obwohl das Konzept allgemein ist, beschränken wir uns wieder auf den Fall der Isospinvarianz SU(2), wobei die Ergebnisse schon von der Drehimpulsalgebra in der Quantenmechanik bekannt sein sollten.

Betrachten wir also jetzt Amplituden der Form

$$\langle f | \hat{H}_I | i \rangle,$$

wo  $\hat{H}_I$  nicht invariant ist ( $[T^a, \hat{H}_I] \neq 0$ ).

$\hat{H}_I$  kann aber immer noch zu irreduziblen Darstellungen ausreduziert werden! (vgl. Übungen)

Diese bilden, zusammen mit  $|i\rangle$ , direkte Produkte von Darstellungen, die wieder zu irreduziblen Darstellungen ausreduziert werden können, um zu sehen, welche der letzteren mit der Darstellung von  $\langle f |$  übereinstimmen.

Das heißt:

$$\langle JJ_3 | (\hat{H}_I)_{II'_3} | II_3 \rangle = \overbrace{\langle JJ_3 | [ |I'I'_3\rangle |II_2\rangle ]}^{\text{Clebsch-Gordan}} \times \underbrace{A(I, I', J)}$$

unabhängig von  $J_3, I'_3, I_3$ !

[vgl. Übungen]

Beispiel

5.34:  $|\pi^+\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle$   
 $|\pi^+\pi^-\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{6}}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle$   
 $|\pi^+\pi^0\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}|21\rangle$

Aufgabe 7.3:  $|K^+\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$  (mit  $\bar{3}$ )  
 $|K^-\rangle = |-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$  (mit  $3$ )  
 $|K^0\rangle = |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$  (mit  $\bar{3}$ )  
 $|\bar{K}^0\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$  (mit  $3$ )

Der physikalische neutrale Kaonzustand ist eigentlich  $|K_S^0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$ . Man kann aber durch CP-Invarianz zeigen, daß die Amplitude für  $|K_S^0\rangle$  von der Amplitude für  $|K^0\rangle$  durch Multiplikation mit  $\sqrt{2}$  erreicht werden kann. Betrachten wir also  $|K^0\rangle$ .

Um Kaonzerfälle zu vermitteln, muß  $\hat{H}_I$  in einer Darstellung mit  $I' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  oder  $\frac{5}{2}$  sein [Aufgabe 7.3]. Der Fall  $I' = \frac{5}{2}$  ist in der Natur allerdings [laut des Fermi-Modells] nicht vorhanden [Aufgabe 7.4].

Seien  $A_{\Delta I=3/2} \equiv \langle 20 | \hat{H}_I | \overset{K^0}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \rangle$   
 $A_{\Delta I=1/2} \equiv \langle 00 | \hat{H}_I | \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \rangle$ .

Was sind dann die physikalischen Amplituden  $\langle \pi^+\pi^0 | \hat{H}_I | K_S^0 \rangle, \langle \pi^+\pi^-\hat{H}_I | K_S^0 \rangle, \langle \pi^+\pi^0 | \hat{H}_I | K^0 \rangle$ ?

Betrachten wir  $\langle \pi^+\pi^0 | \hat{H}_I | K_S^0 \rangle$   
 $= \sqrt{2} \langle \pi^+\pi^0 | \hat{H}_I | K^0 \rangle$   
 $= \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 20 | - \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 00 | \right) \hat{H}_I | \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \rangle$

Wigner-Eckart + Clebsch-Gordan:

$\bullet \langle 20 | \hat{H}_I | \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \rangle = A_{\Delta I=3/2} = \underbrace{\langle 20 | [ | \frac{3}{2}\frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \rangle ]}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \mathcal{A}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{A}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2)$   
 $\bullet \langle 00 | \hat{H}_I | \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \rangle = A_{\Delta I=1/2} = \underbrace{\langle 00 | [ | \frac{1}{2}\frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \rangle ]}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \mathcal{A}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{A}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\Rightarrow \langle \pi^+\pi^0 | \hat{H}_I | K_S^0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}} A_{\Delta I=3/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} A_{\Delta I=1/2}$

Die anderen Amplituden: Aufgabe 9.4.

